

Ein Verfahren zur Messung der Wärmeausdehnung bei verschiedenen Feuchtigkeitsgehalten der Umgebung, sowie seine praktische Erprobung an Holz, Millimeterpapier, Mipolam (PCU) und Plexigum (M 222).

Von H. EBERT.

(Mitteilung aus dem Deutschen Amt für Maß und Gewicht in Weida i. Thür.)

Mit 10 Textabbildungen.

(Eingegangen am 4. Februar 1949.)

Die Wärmeausdehnung von Stoffen wird meist relativ mittels des Rohrverfahrens [1] gemessen, das bequem zu handhaben ist. Die Ablesart ist gegenüber der zuerst eingeführten (Verschiebung zweier Skalen gegeneinander und Messung dieser Verschiebung mit Hilfe von Okularmikrometern) durch Verwendung einer Meßuhr [2] besonders einfach gestaltet worden. Es ergab sich dabei auch die Möglichkeit, die zu untersuchenden Stäbe während der Erwärmung vom Meßdruck zu entlasten.

Ganz allgemein zeichnet sich das Rohrverfahren dadurch aus, daß es bezüglich der Versuchsbedingungen außerordentlich anpassungsfähig ist. Das zeigte sich z. B., als es in seiner ursprünglichen Art für die Bestimmung der Wärmeausdehnung bis zur Temperatur des flüssigen Wasserstoffes [3] hergerichtet wurde.

Auch die Versuchsbedingungen einer konstanten, beliebig einstellbaren Feuchtigkeit ist mit dem Rohrverfahren verhältnismäßig leicht und in jeder Weise sehr befriedigend erfüllbar¹.

Das den Versuchsstab X (Abb. 1) umhüllende Versuchsrohr R erhält 2 Ansätze A und B , den einen am unteren, den anderen wenig oberhalb des Stabendes seitwärts. Ferner werden am Taster Ta besonders gut sitzende Dichtungsringe D_1 und D_2 angebracht. Q_1 und Q_2 sind Zwischenscheiben aus Quarz, H_1 und H_2 Führungsstifte, M die Meßuhr.

So hergerichtet, kann das Rohr mit umgewälztem Gas beschickt werden, indem dieses bei A ein-, bei B wieder austritt. Das durchgeleitete Gas aber kann nach Belieben durch eine zusätzlich angeschaltete Apparatur in einen gewünschten Zustand gebracht werden. Handelt es sich darum, Luft von verschiedenem Feuchtigkeitsgehalt umzuwälzen, so eignet sich dazu die in Abb. 2 gezeigte Anordnung.

Von der kleinen Turbine Z wird der Luftstrom in eine Leitung gefördert, die sich in die beiden Äste (1) und (2) verzweigt. Der eine dieser Äste enthält Trockengefäße (T), mit Blaugel gefüllt, der andere Befeuchtungsgefäße (F) mit destilliertem Wasser, das gegebenenfalls noch erwärmt wird, vor allem dann, wenn die Versuchs-(Bad)-Temperatur oberhalb der des Raumes liegt.

Der gewünschte Feuchtigkeitsgehalt kann durch Mischen der beiden Luftströme extremen Feuchtigkeitsgehaltes hergestellt werden, indem diese durch

entsprechende Drosselung in ihrer Ergiebigkeit reguliert werden.

Der so vorbehandelte Luftstrom wird nunmehr durch eine Glasschlange S geleitet, die konzentrisch das Wärmeausdehnungsrohr umgibt und an dessen unterem Teil in das Rohr selbst hineinführt. Die Glasschlange befindet sich zum großen Teil in demselben Thermostaten (durch die Anordnung nach HÖPPLER reguliert), wie der Ausdehnungsapparat, damit der Luftstrom vorgewärmt und richtig temperiert am Versuchsstab X vorbeistreicht.

Weiter wird die Luft vom seitwärts befindlichen Austrittstück B (Abb. 1) an einem in der Leitung angeordneten Thermometer T_1 vorbeigeführt, dessen Gefäß von einem porösen Mantel umgeben ist und durch die Vorrichtung B befeuchtet werden kann. Auch dieser Teil der Leitung befindet sich in dem gleichen Thermostaten, wie Glasschlange und Ausdehnungsrohr.

Als dann tritt die Leitung aus dem Thermostaten wieder heraus, wird durch den LIEBIG-Kühler L gekühlt, damit sich der in der Luft befindliche Wasserdampf abscheiden kann und, dadurch die Turbine Z vor allzu großer Feuchtigkeit geschützt wird. Im Auslaßgefäß A wird das kondensierte Wasser abgefangen. Gegebenenfalls wird vor der Turbine noch ein besonderes Trockengefäß vorgeschaltet. Der Kreislauf ist mit der Rückleitung zur Turbine geschlossen.

Der Taster Ta im Ausdehnungsrohr mit seinen Führungsringen D_1 und D_2 ist in seinem Gewicht so abgeglichen, daß die die Luft umwälzende Kraft den Taster nicht heben kann.

Der Feuchtigkeitsgehalt der Luft wird, wie die Anordnung erkennen läßt, psychrometrisch bestimmt, indem als „trockene“ Temperatur die des Thermostaten, als „feuchte“ die des befeuchtbaren Thermometers genommen wird.

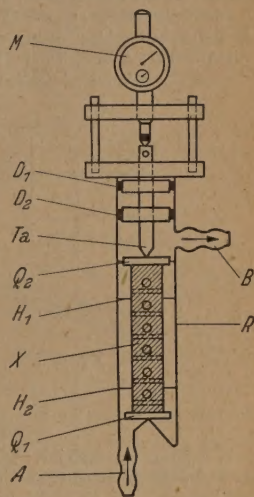


Abb. 1. Rohrverfahren, hergerichtet zur Bestimmung der relativen Wärmeausdehnung unter gleichzeitigem Durchlaß eines Gasstromes. M Meßuhr; D_1, D_2 Dichtungsringe; Q_1, Q_2 Quarzplatten; Ta Taster; H_1, H_2 Stabilisierungsstifte; X der zu untersuchende Stab; R Umhüllungs- (Vergleichs-) Rohr; A Lufteintritt; B Luftabzug.

¹ An der Durchführung dieser Versuche waren der Werksekretär H. JUNG und die Laborantin E. EICHNER beteiligt. Beide haben mit fleißigem Mühen und ausdauernder Gewissenhaftigkeit mitgearbeitet.

Zur Berechnung der Punkte kann die SPRUNGSche Formel [4]

$$e = e' - \frac{1}{2} (t - t_f)$$

bei Atmosphärendruck angewendet werden. e ist der tatsächliche herrschende Partialdruck des Wasserdampfes, e' der Sättigungsdruck bei der Temperatur t_f ,

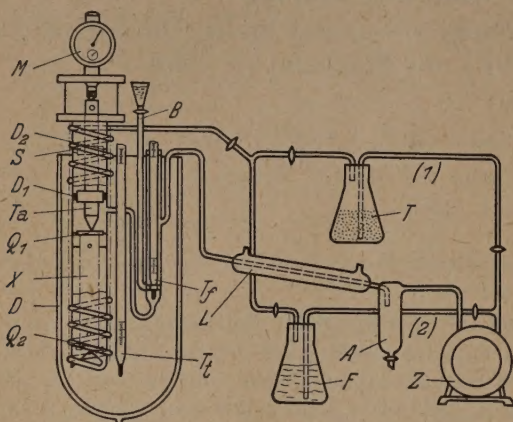


Abb. 2. Apparatur zur Bestimmung der Wärmeausdehnung in Abhängigkeit von der Feuchtigkeit. M , D_1 , D_2 , T_a , H_1 , H_2 , Q_1 , Q_2 , X wie Abb. 1. S Vorwärmanschlage; T_1 Bad-Thermometer; T_2 befeuchtete Thermometer; B Befeuchtungseinrichtung dazu; L LIEBIG-Kühler als Kondensator mit Abfluß A ; Z Zentrifuge; (1) der trockene (Trockengefäß T); (2) der feuchte (Befeuchter F) Luftstromzweig.

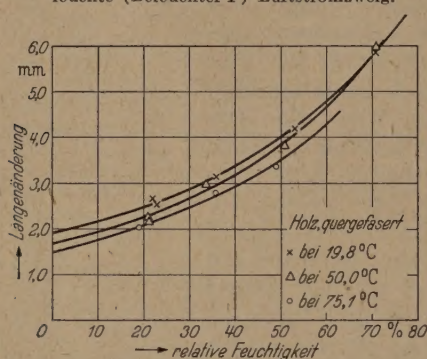


Abb. 3. Holz quergefasert: Isotherme Längenänderungen bei verschiedenen relativen Feuchtigkeiten. Stablänge 115,3 mm bei Feuchtigkeit (φ) = 0 und 19,8° C.

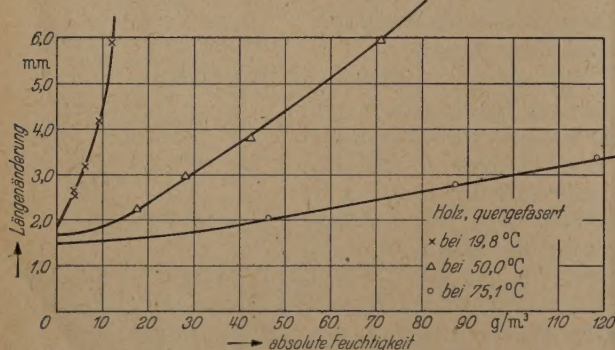


Abb. 4. Holz quergefasert: Isotherme Längenänderung bei verschiedenen absoluten Feuchtigkeiten. Stablänge 115,3 mm bei $\varphi = 0$ und 19,8° C.

des befeuchteten Thermometers und t die Anzeige des nicht befeuchteten, also trockenen Thermometers, im Falle der Apparatur der Abb. 2 die des Bades.

Mit dieser Anordnung nun sind einige Stoffe wie Holz, Millimeterpapier und aus der großen Fülle der Kunststoffe Mipolam (PCU) und Plexigum (M 222) bezüglich ihrer Wärmeausdehnung in Abhängigkeit vom Feuchtigkeitsgehalt der umgebenden Luft untersucht worden. Damit sollte die Anordnung erprobt und zugleich Anhaltspunkte für die Eignung solcher

Stoffe zum Bau bestimmter Apparate gewonnen werden. Sei es, daß Skalenträger aus solchen Stoffen hergestellt oder diese selbst bei Feuchtigkeitsmessungen als feuchteempfindliches Meßglied verwendet werden.

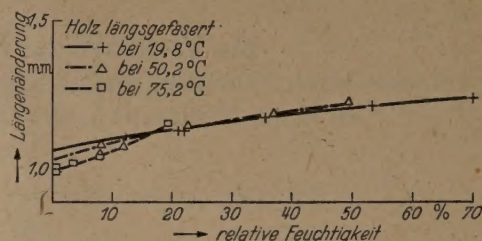


Abb. 5. Holz längsgefaser: Isotherme Längenänderung bei verschiedenen relativen Feuchtigkeiten. Stablänge 116,5 mm bei $\varphi = 0$ und 19,8° C.

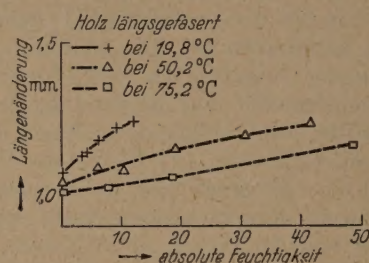


Abb. 6. Holz längsgefaser: Isotherme Längenänderungen bei verschiedenen absoluten Feuchtigkeiten. Stablänge 116,5 mm bei $\varphi = 0$ und 19,8° C.

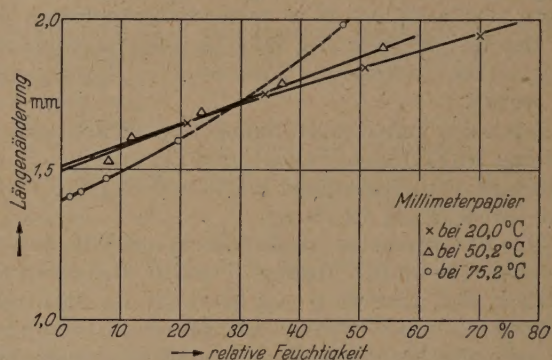


Abb. 7. Millimeterpapier: Isotherme Längenänderung bei verschiedenen relativen Feuchtigkeiten. Stablänge 149,93 mm bei $\varphi = 0$ und 19,8° C.

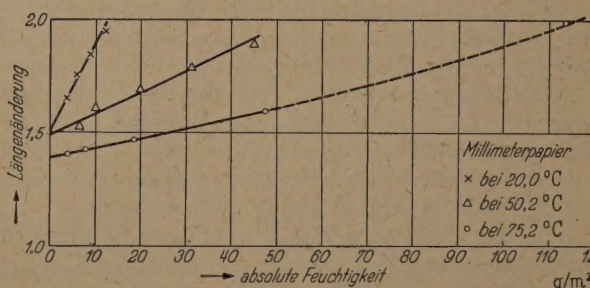


Abb. 8. Millimeterpapier: Isotherme Längenänderung bei verschiedenen absoluten Feuchtigkeiten. Stablänge 149,93 mm bei $\varphi = 0$ und 19,8° C.

Im letzteren Falle kann mit der eingangs beschriebene Apparatur die Temperaturabhängigkeit der Längenänderung bei verschiedenem Feuchtigkeitsgehalt ermittelt werden. Im einzelnen sei kurz mitgeteilt:

Holz. Die für die Versuche verwendeten Proben wurden dem Stamm einer etwa 100 Jahre alten Fichte entnommen. Es wurden längs- und quergefaserte Stäbe von 116,5 bzw. 115,3 mm Länge bei Feuchtigkeit 0 und 19,8° C untersucht. Dabei sind, wie bei den anderen Stoffen, die Längen

änderungen bei festgehaltener Temperatur und jeweils veränderter Feuchtigkeit beobachtet worden. Die Ergebnisse sind in den Abb. 3—6 graphisch wiedergegeben. Dabei sind die Kurven so zu deuten: Das obere Ende des Probestabes stehe bei 19,8°C und 0% Feuchtigkeit bei dem durch die 19,8°-Isotherme gegebenen Schnittpunkt auf der Ordinate mit der Abszisse 0. Ändern sich Feuchtigkeit oder Temperatur oder beides zugleich, so bewegt sich das Stabende in dem Darstellungsfeld und zwar bei konstanter Feuchtigkeit senkrecht zur Abszissenachse, bei konstanter Temperatur längs der gezeichneten

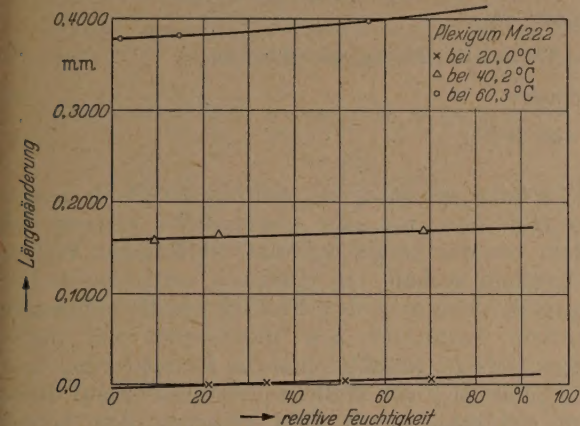


Abb. 9. Plexigum M 222: Isotherme Längenänderungen bei verschiedenen prozentischen Feuchtigkeiten. Stablänge 117,8 mm bei $\varphi = 0$ und 19,8° C.

Isothermen. Es ist besonders zu beachten, daß bei Bezug auf relative Feuchtigkeit die Werte größenordnungsmäßig anders liegen wie bei Bezug auf absolute Feuchtigkeit. So sind früher gefundene Werte

Tabelle 1. Wärmeausdehnungskoeffizient (10^5) abhängig:

Beim Feuchtigkeitsgehalt	zwischen den Temperaturen °C	Holz		Millimeterpapier	Mipolam (PCU)	Plexigum (M 222)
		quer-gefasert	längs-gefasert			
a) von der relativen Feuchtigkeit.						
0%	20/40	—	—	—	6,20	—
	20/50	—	—	— 0,45	—	—
	20/60	—	—	—	6,95	8,3
	20/75	— 7,1	— 1,4	— 1,45	—	—
	40/60	—	—	—	—	9,3
20%	20/75	— 6,8	+ 0,3	— 1,10	—	—
40%	20/75	—	—	+ 1,05	—	—
50%	20/50	— 5,6	+ 0,7	—	—	—
	20/60	—	—	—	—	8,4
	20/75	— 8,3	—	—	—	—
	40/60	—	—	—	—	9,7
60%	20/50	—	—	+ 1,30	—	—
75%	20/60	—	—	—	—	8,6
	40/60	—	—	—	—	10,3
b) von der absoluten Feuchtigkeit.						
0 g/m³	20/40	—	—	—	6,20	—
	20/50	—	—	— 0,40	—	—
	20/60	—	—	—	6,95	8,2
	20/75	— 7,1	— 1,4	—	—	—
	40/60	—	—	—	—	9,3
10 g/m³	20/60	—	—	—	—	8,2
	20/75	— 47,0	— 3,0	— 6,2	—	—
	40/60	—	—	—	—	9,3
20 g/m³	50/75	— 26	— 3,2	—	—	—
30 g/m³	40/60	—	—	—	—	8,8
	50/75	—	—	— 6,8	—	—
40 g/m³	50/75	— 62	— 3,2	—	—	—
50 g/m³	50/75	—	—	— 9,5	—	—

der Wärmeausdehnung an Holz nicht ohne weiteres vergleichbar, wenn nicht die Temperatur- und Feuchtigkeitsangaben genau vorliegen. Auch für quer- und längsgefaserte Stäbe sind die entsprechenden Kurven sehr unterschiedlich. Bemerkenswert ist noch die Tatsache, daß sich bei längsgefasertem Holz die auf relative Feuchtigkeit bezogenen Kurven bei fast linearem Verlauf in der Gegend von 20% schneiden. Die Wärmeausdehnung ist in diesem Punkt also Null darüber positiv, darunter negativ.

Da beim Holz die Verhältnisse stark variieren, ist anzunehmen, daß auch bezüglich des Alters, der Stelle,

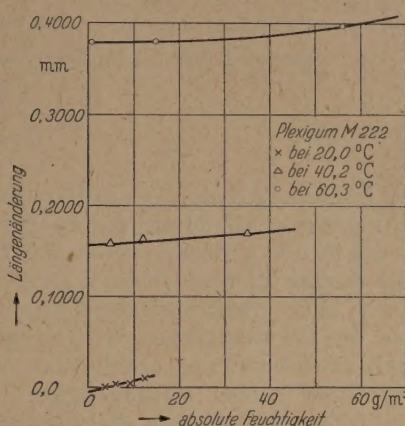


Abb. 10. Plexigum M 222: Isotherme Längenänderungen bei verschiedenen absoluten Feuchtigkeiten. Stablänge 117,8 mm bei $\varphi = 0$ und 19,8° C.

von der der Probestab entnommen wurde, und vor allem bezüglich der Baumgattung weitere Komplikationen auftreten.

Es muß daher der Schluß gezogen werden, daß für physikalische Geräte unpräpariertes Holz als Werkstoff für Meßorgane nicht verwendbar ist, z. B. nicht für einen Maßstab, mit dem zum Zwecke einer Druckmessung Flüssigkeitshöhen gemessen werden sollen.

Andererseits können die Kurven der Abb. 3—6 als Justierkurven für einen Feuchtigkeitsmesser aufgefaßt werden, wobei dann anzumerken ist, daß sich in diesem Falle Stäbe aus quergefasertem Holz besser eignen. Zahlenwerte befinden sich in der Tabelle 1.

Millimeterpapier. (Gebr. Wichmann, Vorkriegsqualität). Als Probestab wurde eine 0,7 cm dicke Rolle aus einem Blatt 12×15 cm² genommen.

Die Ergebnisse sind in der gleichen Weise, wie beim Holz in den Abb. 7 und 8 graphisch dargestellt. Dabei fällt auf, daß sich in der Nähe der 30%-Feuchtigkeit (Abb. 7) — ähnlich wie beim längsgefaserten Holz — die Isothermen schneiden, so daß die gleichen Folgerungen bezüglich der Wärmeausdehnung gelten (Zahlenwerte sind auch für Millimeterpapier in der Tabelle 1 enthalten).

Mipolam (PCU). Dieser Kunststoff zeigt eine nur sehr geringe Abhängigkeit seiner Wärmeausdehnung von der Feuchtigkeit; die Ausdehnungswerte werden mit steigender Feuchtigkeit etwas kleiner (siehe ebenfalls Tabelle 1).

Plexigum (M 222). Auch die Wärmeausdehnung dieses Kunststoffes zeigt, wenn auch sichtlich in höherem Maße als Mipolam, keine große Abhängigkeit von der Feuchtigkeit.

Für diesen Stoff sind in den Abb. 9 und 10 die experimentellen Werte wiederum in einer graphischen

Darstellung sowie in der Tabelle 1 niedergelegt worden.

Zusammenfassung.

Das anpassungsfähige Rohrverfahren zur relativen Wärmeausdehnungsmessung läßt sich auch für den Fall ausbauen, daß die Wärmeausdehnung von Stoffen bei verschiedenem Feuchtigkeitsgehalt der umgebenden Luft gemessen werden kann.

Die neue Apparatur wurde durch Messungen an Holz, Millimeterpapier, Mipolam und Plexigum erprobt.

Literatur. [1] HENNING, F.: Ann. Phys. (4) 22, 631 (1907). [2] EBERT, H.: Phys. Z. 39, 6 (1938). — [3] EBERT, H.: Phys. 47, 712 (1928). — [4] EBERT, H., u. A. PFEIFFER: Phys. 46, 420 (1928).

Dr. H. EBERT, (15b) Weida i. Thür., Postfach 8.
Deutsches Amt für Maß und Gewicht.

Das Feld in inhomogenen Rechteckrohren bei Anregung mit der H_{10} -Welle*.

Von ROBERT PILOTY jun.

(Aus dem Institut für Hochfrequenztechnik der Technischen Hochschule München.)

Mit 5 Textabbildungen.

(Eingegangen am 1. Juli 1948.)

In einer früheren Arbeit [1] wurde gezeigt, daß man durch konforme Abbildung des Längsschnittes eines entweder in der E -Ebene oder in der H -Ebene inhomogenen Rechteckrohres auf einen geraden Streifen, d. h. durch Einführung besonderer krummliniger Koordinaten die MAXWELLSchen Gleichungen eines ebenflächigen Rechteckrohres erhält, das im allgemeinen Fall mit einem ortsabhängigen und in bestimmter Weise anisotropen dielektrischen und permeablen Medium angefüllt zu denken ist. Dieses Gebilde wurde ein „transformierter E -“ bzw. „ H -Vierpol“ oder kurz „ ET -“ bzw. „ HT -Vierpol“ genannt. Das Feld in der ursprünglichen Inhomogenität ist, prinzipiell wenigstens, mit dem in der transformierten auf sehr einfache Weise verknüpft. Die Impedanztransformation von Vierpolausgang zu Vierpoleingang sind, in geeigneter Weise definiert, sogar identisch, so daß man sich bei deren Ermittlung lediglich mit der T -Inhomogenität zu befassen braucht.

Bei Anregung mit der H_{10} -Welle gibt deren Symmetrie Anlaß zu besonderen Vereinfachungen. Man hat sich dann den ET -Vierpol nur mit einem ortsabhängigen anisotropen $\mu(x, y)$ bzw. den HT -Vierpol mit einem ortsabhängigen isotropen $\varepsilon(x, z)$ angefüllt vorzustellen. Es läßt sich dann für die H_z -Komponente bzw. für die E_y -Komponente eine verallgemeinerte Wellengleichung aufstellen.

Unsere Aufgabe in dieser Arbeit besteht darin, Lösungen dieser beiden partiellen Differentialgleichungen und damit den Zugang zum Gesamtfeld zu finden. Wir werden am Schluß in der Lage sein, das Feld in sukzessiven Näherungen beliebig genau zu berechnen und speziell die Frage nach der Impedanztransformation, die ja von besonderer praktischer Bedeutung ist, zu beantworten. Bei den E -Vierpolen ist in den meisten Fällen, wie sich bei der Durchrechnung von praktischen Beispielen gezeigt hat, die erste Näherung schon so genau, daß sie für technische Zwecke völlig ausreicht. Es stellt sich dabei heraus,

daß solange sie gültig ist, sich die E -Inhomogenität des Hohlrohrs wie eine gewöhnliche Leitung mit einem von der Längskoordinate abhängigen Wellenwiderstand verhält. In praktisch auftretenden Fällen, z. B. wenn man den Einfluß von Krümmungen, Knicken, Stoßstellen usw. untersuchen will, dürfte dieses einfache Ergebnis manche Erleichterung bringen, zumal sich der Wellenwiderstandsverlauf direkt dem elektrostatischen Feld zwischen den breiten Hohlrohrflächen entnehmen läßt.

1. Das Feld des ET -Vierpols.

Zu jeder E -Inhomogenität, beispielsweise einer Stoßstelle, deren Längsschnitt Abb. 1a zeigt, gehört bei Anregung mit der H_{10} -Welle eine transformierte (ET -)Inhomogenität (Abb. 1b) mit folgenden Eigenschaften [1]:

1. Ihre leitenden Begrenzungen sind eben.
2. Innerhalb des I -Bereiches ist sie mit einem ortsabhängigen und anisotropen $\mu(x, y)$ angefüllt.
3. Die Dielektrizitätskonstante ist überall gleich Δ_0 (leerer Raum).

4. a) Die μ -Verteilung ergibt sich aus der Abbildungsfunktion, die den inhomogenen Längsschnitt des ursprünglichen Vierpols (Abb. 1a) konform den geraden Streifen des ET -Vierpols (Abb. 1b) überführt.

b) Besonders einfach läßt sich die Funktion $\mu(x, y)$ aus dem elektrostatischen Feldbild zwischen dem oberen und unteren Leiter des ursprünglichen Vierpols graphisch gewinnen, da folgende Regel gilt: Der Wert μ in jedem quadratischen Normalflächenelement des I -Bereiches von Abb. 1b ist zahlenmäßig gleich der Fläche des entsprechenden, in Einheiten des Normalflächenelements gemessenen krummen Flächenelements im ursprünglichen I -Bereich (Abb. 1a). Die statischen Feld- und Äquipotentiallinien können z. B. durch Konstruktion (Methode von KUFFMÜLLER [2]) oder experimentell (elektrolytischer Trochäometer) bestimmt werden.

c) Gemäß obiger Definition ist $\mu(x, y)$ eine überall reguläre Funktion ≥ 0 , die nach den Seiten A und B exponentiell in konstante Werte übergeht. Wählt man z. B. als Leiterabstand in Abb. 1b denjenigen auf der Seite B in Abb. 1a, dann ordnen wir dem Wert μ_B in Abb. 1b den konstanten Wert $\mu_B = 1$ zu. Damit erhalten wir auf Seite A entsprechend den

* Diese und die vorangegangene Arbeit mit dem Titel „Die Anwendung der konformen Abbildung auf die Feldgleichungen in inhomogenen Rechteckrohren“ stellen in verkürzter Form eine von der T. H. München genehmigte Diss. (D 91) dar. Da sich die vorliegende Arbeit eng an die Begriffe und Ergebnisse der vorangegangenen hält, wird dem Leser empfohlen sich mit deren Inhalt zuerst vertraut zu machen. Gleichungs- und Abbildungsnummern, die sich auf die erste Arbeit beziehen, werden mit einem Stern gekennzeichnet.

auf tretenden Randbedingungen (29'*) für alle x erfüllt. Wegen der dann geforderten Längssymmetrie ist

$$H_z = f_0 + f_2 \cos \frac{2\pi}{b_B} y + f_4 \cos \frac{4\pi}{b_B} y + \dots$$

$$= f_0 + \sum_{v=1}^{\infty} f_{2v} \cos \frac{2v\pi}{b_B} y,$$

d. h. die Glieder mit ungeradem Index fallen weg, womit $\frac{\partial H_z}{\partial y} \Big|_{y=b_B/2} = 0$ wie gefordert, erfüllt ist.

Wir brauchen uns daher weiterhin nicht mehr gesondert mit diesem E -Inhomogenitätstyp befassen.

Nun zerlegen wir auch $\mu(x, y)$ in eine FOURIER-Reihe

$$\left. \begin{aligned} \text{a)} \quad \mu(x, y) &= K^2(x, y) = \mu_0(x) + \\ &+ \sum_{v=1}^{\infty} \mu_v(x) \cos \frac{v\pi}{b_B} y, \\ \text{wobei} \\ \text{b)} \quad \mu_0(x) &= \frac{1}{b_B} \int_0^{b_B} \mu(x, y) dy, \\ \text{c)} \quad \mu_v(x) &= \frac{2}{b_B} \int_0^{b_B} \mu(x, y) \cos \frac{v\pi}{b_B} y dy. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Durch Einsetzen von (8) und (9) in (6a) erhält man unter Benutzung einer bekannten trigonometrischen Formel den Ausdruck

$$f_0'' + \mu_0 f_0 + \sum_{v=1}^{\infty} \left[f_v'' - \left(\frac{n\pi}{b_B} \right)^2 f_n + k^2 \mu_n f_0 + k^2 \mu_0 f_n \right] \times$$

$$\times \cos \frac{n\pi}{b_B} y + \frac{k^2}{2} \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} f_m \mu_v \times$$

$$\times \left(\cos(v+m) \frac{\pi}{b_B} y + \cos(v-m) \frac{\pi}{b_B} y \right) = 0.$$

Diese Gleichung kann nur erfüllt sein, wenn jeder Faktor von $\cos \frac{n\pi}{b_B} y$ für $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ selbst wieder gleich Null ist. Wir erhalten so ein unendliches Differentialgleichungssystem für die f_0, f_1, f_2, \dots

$$\left. \begin{aligned} \text{a)} \quad f_0''(x) + k^2 \mu_0(x) f_0(x) &= \frac{k^2}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \mu_m(x) f_m(x), \\ \text{b)} \quad f_n''(x) - \left[\left(\frac{n\pi}{b_B} \right)^2 - k^2 \left(\mu_0(x) + \frac{1}{2} \mu_{2n}(x) \right) \right] f_n(x) &= k^2 \mu_n(x) f_0(x) + \\ &+ \frac{k^2}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \delta_{nm} (\mu_{|n-m|} + \mu_{n+m}) f_m(x) = 0, \\ &\quad n = 1, 2, 3, \dots \\ &\quad \delta_{nm} \begin{cases} = 0 & n = m \\ = 1 & n \neq m \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

mit den Nebenbedingungen

$$\left. \begin{aligned} \text{a)} \quad f_0(x) &\rightarrow \mathfrak{B}_{10} e^{-j k_B x} + \mathfrak{B}_{20} e^{j k_B x} \\ &\quad \text{für } x \rightarrow -\infty \\ \text{b)} \quad f_n(x) &\rightarrow \mathfrak{B}_{2n} e^{k_n x} \quad \text{für } x \rightarrow -\infty \\ f_n(x) &\rightarrow \mathfrak{A}_{1n} e^{-k_n x} \quad \text{für } x \rightarrow +\infty \\ k_{nA} &= \sqrt{\left(\frac{n\pi}{b_B} \right)^2 - k^2 \mu_A} \quad (\text{reell}). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

f_0, f_n werden im allgemeinen komplexe Funktionen der reellen Veränderlichen x sein: $f_n = \Re(f_n(x)) + j \Im(f_n(x))$ $n = 0, 1, 2, \dots$. Gl. (10a) beherrscht den Durchgang der Grundwelle durch die T -Inhomogenität während die Gl. (10b) in ihrer Gesamtheit deren Störfeld repräsentieren. Jede einzelne bestimmt eine Störfeldkomponente höherer Ordnung. Mathematisch gesehen ist damit die partielle Differentialgleichung (6a) auf ein System unendlich vieler gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen zwischen den x -Abhängigkeiten der Grund- und Störfelder zurückgeführt. Ist das Lösungssystem f_0, f_1, f_2, \dots bekannt, dann gewinnt man durch (8) das magnetische Feld und daraus mit Hilfe von (6b und c) die übrigen Feldkomponenten.

1.2 Die Lösung

des unendlichen Differentialgleichungssystems.

1.21 Diskussion der ET -Funktion und der Nebenbedingungen.

Im folgenden besteht die Aufgabe, dem System (10) eine konvergente Funktionenfolge f_0, f_1, f_2, \dots zu entnehmen, die dessen Lösung darstellt und die Nebenbedingungen (11) erfüllt. Um einzusehen, daß diese Bedingungen physikalisch sinnvoll sind, d. h. von dem gegebenen System erfüllt werden können, stellen wir folgende Betrachtungen an:

Die von Anfang an gemachte Voraussetzung, daß die Inhomogenität örtlich begrenzt sei, drückt sich durch die folgenden Eigenschaften der ET -Funktion aus

$$\mu(x, y) \rightarrow \begin{cases} \mu_A & x \rightarrow +\infty \\ \mu_B & x \rightarrow -\infty. \end{cases}$$

Für deren FOURIER-Koeffizienten nach (9b, c) gilt damit

$$\begin{aligned} \mu_0(x) &\rightarrow \begin{cases} \mu_A & x \rightarrow +\infty \\ \mu_B & x \rightarrow -\infty, \end{cases} \\ \mu_v(x) &\rightarrow 0 \quad x \rightarrow \pm\infty \quad v = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

$\mu_0(x)$ stellt an jeder Stelle x den Mittelwert von μ über den Querschnitt dar.

Außerdem ist $M > \mu(x, y) > 0$

$$-\infty < x < +\infty$$

M positive Zahl

und da $\mu(x, y)$ überall im Bandleitungsquerschnitt regulär ist, bilden die FOURIER-Koeffizienten μ_v eine konvergente Zahlenfolge, d. h. es gilt

$$\mu_0^2(x) + \sum_{v=1}^{\infty} \mu_v^2(x) = \text{gleichmäßig konvergent für alle } x.$$

Damit nimmt das Differentialgleichungssystem (10) bei $x \rightarrow \pm\infty$ (außerhalb des J -Bereiches) die Form an

$$\left. \begin{aligned} \text{a)} \quad f_0''(x) + k_A^2 \cdot f_0(x) &= 0, \\ A &\text{ für } z \rightarrow +\infty \quad B \text{ für } z \rightarrow -\infty; \\ \text{b)} \quad f_n''(x) - \left[\left(\frac{n\pi}{b_B} \right)^2 - k_A^2 \right] f_n(x) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Man sieht sofort, daß (12a) Lösungen der Form (11a) hat. Weiterhin ermöglicht (12b) Lösungen der Form (11b) wenn nur

$$k_A = k \mu_A < \frac{q\pi}{b_B} \quad (13)$$

q = kleinster vorkommender Index $n \geq 1$ in (10).

Randbedingung (11b) enthält also die Forderung, daß das Störfeld auf beiden Seiten des J -Bereichs abklingen soll. Hierfür muß die Betriebsfrequenz unterhalb der Schranke (13) bleiben.

1.22 Wellen- und Wechselfelder in längsgeschichteten Medien.

Für das Folgende sind linear unabhängige Integrale homogener linearer Differentialgleichungen 2. Ordnung von Bedeutung und zwar von der Art, wie sie aus (10) entstehen, wenn man die rechten Seiten gleich Null setzt. Wir werden uns daher an dieser Stelle mit der praktischen Auffindung solcher Integrale befassen.

Wir haben also mit Gleichungen folgender Form zu tun

$$\left. \begin{aligned} a) \quad & \varphi_0''(x) + k^2 \mu_0(x) \varphi_0(x) = 0, \\ b) \quad & \varphi_n''(x) - \left[\left(\frac{n\pi}{b_B} \right)^2 - k^2 \left(\mu_0(x) + \frac{1}{2} \mu_{2n}(x) \right) \right] \times \\ & \times \varphi_n(x) = 0 \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Gl. (14a) kann als die Differentialgleichung für eine ebene Welle zwischen planparallelen Platten mit längsgeschichteten, d. h. von y unabhängigen μ aufgefaßt werden, Gl. (14b) als solche für exponentielle Wechselfelder.

Es sind mehrere Methoden denkbar, die zu Lösungen von Gleichungen der Art (14) führen. Ein dem Verfasser auch vom Standpunkt der praktischen Auswertung aussichtsreich erscheinendes Verfahren findet man in [3] und [4]. Danach wird die gegebene Differentialgleichung in eine ihr äquivalente Integralgleichung verwandelt und diese anschließend mit Hilfe sukzessiver Approximationen gelöst. Es liege z. B. folgende Gleichung vor

$$\varphi''(x) + \mu(x) \cdot \varphi(x) = 0, \quad (15)$$

wobei $\mu(x)$ eine positive, stetige Funktion darstelle, die für $x \rightarrow \pm \infty$ in konstante Werte übergeht. Die Randbedingung sei gegeben durch

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi(a) \cos(x-a) + j \varphi'(a) \sin(x-a) \quad \text{für } x \rightarrow -\infty.$$

Die der Gl. (15) äquivalente Integralgleichung lautet dann

$$\varphi(x) = \varphi(a) \cos(x-a) + j \varphi'(a) \sin(x-a) + \int_{-\infty}^x (\mu-1) \varphi \sin(x-\xi) d\xi.$$

Stimmt man

$$N_0 = \varphi(a) \cos(x-a) + j \varphi'(a) \sin(x-a) \quad (16)$$

als erste Näherung, dann gewinnt man weitere Verbesserungsglieder N_n durch

$$N_n = \int_{-\infty}^x (\mu-1) N_{n-1} \sin(x-\xi) d\xi$$

und die genaue Lösung wird durch die Reihe

$$\varphi(x) = N_0 + N_1 + N_2 + \dots + N_n + \dots$$

dargestellt. Schreibt man (15) in der Form

$$\varphi''(x) + \varphi(x) = (1-\mu)\varphi(x),$$

so stellt die erste Näherung (16) die Lösung von

$$\varphi''(x) + \varphi(x) = 0,$$

während das Störglied $(\mu-1)\varphi(x)$ den Beitrag der Einflußfunktion $\sin(x-\xi)$ unter dem Integral regelt. Es erweist sich an praktisch gerechneten Beispielen, daß dieses Verfahren überraschend schnell konvergiert. In vielen Fällen genügt eine einzige Verbesserung. Ist $\mu(x)$ durchwegs negativ, treten hyperbolische Funktionen an Stelle der trigonometrischen.

Unabhängige Integrale $\varphi_{10}, \varphi_{20}$ bzw. $\varphi_{1n}, \varphi_{2n}$ der Gl. (14) gewinnen wir z. B., indem wir das eben beschriebene Verfahren auf jede Gleichung unter zugrunde zweier verschiedener Anfangsbedingungen anwenden. Am einfachsten wird wohl sein, ein und dieselbe Anfangsbedingung beim ersten Integral am linken Rand ($x \rightarrow -\infty$), beim zweiten Integral am rechten Rand ($x \rightarrow +\infty$) des J -Bereiches vorzuschreiben und dann einmal von links nach rechts zu integrieren, das andere Mal von rechts nach links. Die so erhaltenen φ_1 und φ_2 sind linear unabhängig und haben den Vorteil, daß bei bezüglich x symmetrischer μ -Verteilung

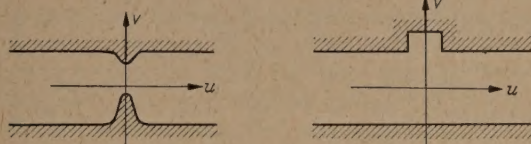


Abb. 2. Bezüglich x symmetrische Inhomogenitäten.

(bezüglich x symmetrischer Inhomogenitäten s. Abb. 2) die einfache Beziehung gilt

$$\varphi_{10}(x) = \varphi_{20}(-x); \quad \varphi_{1n}(x) = \varphi_{2n}(-x),$$

so daß man die Lösung je Gleichung nur einmal auszurechnen braucht.

Eine weitere Möglichkeit zu Lösungen von Gl. (14a) zu gelangen besteht darin, sie als die Wellengleichung für eine Leitung mit einem stetig von x abhängigen Wellenwiderstand aufzufassen. Man nähert dann diese Leitung durch eine Hintereinanderschaltung von vielen kleinen homogenen Leitungstückchen verschiedenen Wellenwiderstands an und behandelt das Problem dann mit dem bekannten Leitungsdiagramm. Es soll jedoch hierauf nicht näher eingegangen werden.

1.23 Der Lösungsweg.

Wir setzen in dem zu lösenden unendlichen System (10) zur Abkürzung

$$a) \quad p_{m0}(x) = \frac{1}{2} \mu_m(x),$$

$$b) \quad p_{mn}(x) = \frac{1}{2} (\mu_{|n-m|}(x) + \mu_{n+m}(x)) \delta_{mn} \\ m, n = 1, 2, 3, \dots;$$

speziell

$$p_{0n}(x) = \mu_n(x) \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

so daß wir erhalten

$$\left. \begin{aligned} a) \quad & f_0''(x) + k^2 \mu_0(x) f_0(x) = k^2 \sum_{m=1}^{\infty} p_{m0}(x) f_m(x), \\ b) \quad & f_n''(x) - \left[\left(\frac{n\pi}{b_B} \right)^2 - k^2 \left(\mu_0(x) + \frac{1}{2} \mu_{2n}(x) \right) \right] f_n(x) \\ & = k^2 \sum_{m=0}^{\infty} p_{mn}(x) f_m(x), \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

mit den Nebenbedingungen (11).

Zu jeder Gl. (17a und b) gehört eine Homogene (14a und b). Man erhält sie indem man die rechte Seite gleich Null setzt. Weiterhin lassen sich dann

zu jeder homogenen Gleichung zwei linear unabhängige Integrale sog. Hauptsysteme

$$\begin{aligned} \varphi_{10}(x), & \quad \varphi_{20}(x), \\ \varphi_{1n}(x), & \quad \varphi_{2n}(x) \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

nach 1.22 finden. Jedes andere Integral der homogenen Differentialgleichung ist dann bekanntlich durch

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0(x) &= C_{10}\varphi_{10}(x) + C_{20}\varphi_{20}(x) \\ \varphi_n(x) &= C_{1n}\varphi_{1n}(x) + C_{2n}\varphi_{2n}(x) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

darstellbar, wobei die $C_{\mu\nu}$ beliebige komplexe Konstanten bedeuten. An sich ist es gleichgültig, welches Hauptsystem wir jeweils nehmen, jedoch wollen wir für unsere Zwecke solche der Art, wie sie am Schluß von 1.22 beschrieben wurden, ins Auge fassen. Hierdurch erhalten wir später einfachere Ergebnisse.

Sie mögen also z. B. folgende Bedingungen erfüllen

$$\left. \begin{aligned} \text{a) } & \left\{ \begin{aligned} \varphi_{10}(x) &\rightarrow \mathfrak{B}'_{10} e^{-jk_B x} + \mathfrak{B}'_{20} e^{jk_B x} & x \rightarrow -\infty \\ \varphi_{20}(x) &\rightarrow \mathfrak{B}''_{10} e^{-jk_A x} + \mathfrak{B}''_{20} e^{jk_A x} & x \rightarrow +\infty, \end{aligned} \right. \\ \text{b) } & \left\{ \begin{aligned} \varphi_{1n}(x) &\rightarrow e^{k_{nB} \cdot x} & x \rightarrow -\infty \\ \varphi_{2n}(x) &\rightarrow e^{-k_{nA} \cdot x} & x \rightarrow +\infty, \end{aligned} \right. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

wobei wie in 1.22 besprochen

$$\mathfrak{B}'_{10} = \mathfrak{B}''_{20} = \mathfrak{B}_{10} \quad \text{und} \quad \mathfrak{B}'_{20} = \mathfrak{B}''_{10} = \mathfrak{B}_{20} \quad (19')$$

sein möge. Es sei daran erinnert, daß \mathfrak{B}_{10} und \mathfrak{B}_{20} die vorgeschriebene Anfangsbedingung links vom Vierpol charakterisieren. φ_{1n} und φ_{2n} kann nun nach den in 1.22 angegebenen Methoden berechnet werden. Man erhält dadurch auch die zu (19) komplementären Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} \text{a) } & \left\{ \begin{aligned} \varphi_{10}(x) &= \mathfrak{B}'_{10} e^{-jk_A x} + \mathfrak{B}'_{20} e^{jk_A x} & x \rightarrow +\infty \\ \varphi_{20}(x) &= \mathfrak{B}''_{10} e^{-jk_B x} + \mathfrak{B}''_{20} e^{jk_B x} & x \rightarrow -\infty, \end{aligned} \right. \\ \text{b) } & \left\{ \begin{aligned} \varphi_{1n}(x) &= \mathfrak{B}'_{1n} e^{-k_{nA} \cdot x} + \mathfrak{B}'_{2n} e^{+k_{nA} \cdot x} & x \rightarrow +\infty \\ \varphi_{2n}(x) &= \mathfrak{B}''_{1n} e^{-k_{nB} \cdot x} + \mathfrak{B}''_{2n} e^{+k_{nB} \cdot x} & x \rightarrow -\infty. \end{aligned} \right. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Damit sind wir in der Lage, das allgemeine Integral (18) für jede vorkommende homogene Gleichung anzuschreiben.

Das Integral der inhomogenen Gleichung, bei der auf der rechten Seite — wie in (17) der Fall — eine Funktion von x steht, kann man nun bekanntlich aus (18) mit Hilfe des Verfahrens der Variation der Konstanten ableiten, indem man zuläßt, daß auch die $C_{\mu\nu}$ Funktionen von x werden.

Wendet man dieses Verfahren auf unseren Fall an, dann erhält man folgendes Integralgleichungssystem

$$\left. \begin{aligned} f_0(x) &= -\frac{\varphi_{10}(x)}{W_0} k^2 \times \\ &\times \left\{ \int_{-\infty}^x \varphi_{20} \sum_{m=1}^{\infty} p_{m0} f_m d\xi + c_{10} \right\} + \frac{\varphi_{20}(x)}{W_0} k^2 \times \\ &\times \left\{ \int_{-\infty}^x \varphi_{10} \sum_{m=1}^{\infty} p_{m0} f_m d\xi + c_{20} \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (21a)$$

$$\left. \begin{aligned} f_n(x) &= -\frac{\varphi_{1n}(x)}{W_n} k^2 \times \\ &\times \left\{ \int_{-\infty}^x \varphi_{2n} \sum_{m=0}^{\infty} p_{mn} f_m d\xi + c_{1n} \right\} + \frac{\varphi_{2n}(x)}{W_n} k^2 \times \\ &\times \left\{ \int_{-\infty}^x \varphi_{1n} \sum_{m=0}^{\infty} p_{mn} f_m d\xi + c_{2n} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (21b)$$

In diesem Pseudolösungssystem — es enthält ja an den rechten Seiten noch sämtliche im bekannten $f_m(x)$ — sind W_0, W_n die sog. WRONSKISCHEN Determinanten. Sie berechnen sich aus den Hauptsystemen wie folgt

$$W_0 = \begin{vmatrix} \varphi_{10} & \varphi_{20} \\ \varphi'_{10} & \varphi'_{20} \end{vmatrix}, \quad W_n = \begin{vmatrix} \varphi_{1n} & \varphi_{2n} \\ \varphi'_{1n} & \varphi'_{2n} \end{vmatrix} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Im Falle der linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit fehlendem Glied erster Ableitung ist W_0 konstant für alle x ; es gibt daher z. B. unter Verwendung von (19) und (20)

$$\left. \begin{aligned} W_0 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} W_0(x) \\ &= 2j k_B (\mathfrak{B}_{10} \mathfrak{B}'_{20} - \mathfrak{B}''_{10} \mathfrak{B}_{20}) = k F_0, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

$$W_n = \lim_{x \rightarrow -\infty} W_n(x) = -2k_{nB} \cdot \mathfrak{B}'_{1n} = -k F_n = \text{const.}$$

Dabei ist

$$F_0 = 2j \sqrt{\mu_B} (\mathfrak{B}_{10} \mathfrak{B}''_{20} - \mathfrak{B}'_{10} \mathfrak{B}_{20});$$

$$F_n = 2 \sqrt{\left(\frac{n\pi}{kb_B} \right)^2 - \mu_B} \cdot \mathfrak{B}'_{1n}.$$

Wir müssen nun die Konstanten c_{10}, c_{1n} bzw. c_{20}, c_{2n} so bestimmen, daß die f_0, f_n auf der linken Seite von (21) die Nebenbedingungen (11) erfüllen. Durch die besondere Wahl der Hauptsysteme nach (19) und (19') wird das besonders einfach.

Die Bedingung

$f_0(x) \rightarrow \varphi_{10}(x) = \mathfrak{B}_{10} e^{-jk_B x} + \mathfrak{B}_{20} e^{jk_B x}$ für $x \rightarrow -\infty$ wird durch

$$c_{10} = -\frac{W_0}{k^2}; \quad c_{20} = 0$$

erfüllt. Die Bedingung $f_n(x)$ exponentiell gegen 0 für $x \rightarrow -\infty$ wird erfüllt, wenn in Gl. (21b) der Faktor von $\varphi_{2n}(x)$ auch gegen 0 geht. Dies ist der Fall für

$$c_{2n} = 0.$$

Am rechten Rand ($x \rightarrow +\infty$) muß $f_n(x)$ ebenfalls exponentiell nach 0 gehen. Dies kann nur erreicht werden, wenn diesmal zugleich der Faktor von $\varphi_{1n}(x)$ null wird, d. h.

$$c_{1n} = -\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{2n} \sum_{m=0}^{\infty} p_{mn} f_m dx.$$

Nach Einsetzen von (22) und der Konstanten $c_{10}, c_{1n}, c_{20}, c_{2n}$ in (21) erhält man

$$\left. \begin{aligned} f_0(x) &= \varphi_{10}(x) \left\{ 1 - \frac{k}{F_0} \int_{-\infty}^x \varphi_{20} \sum_{m=1}^{\infty} p_{m0} f_m d\xi \right\} + \\ &+ \varphi_{20}(x) \frac{k}{F_0} \int_{-\infty}^x \varphi_{10} \sum_{m=1}^{\infty} p_{m0} f_m d\xi, \end{aligned} \right\} \quad (23a)$$

$$\left. \begin{aligned} f_n(x) = & \varphi_{1n}(x) \frac{k}{F_n} \int_x^\infty \varphi_{2n} \sum_{m=0}^\infty p_{mn} f_m d\xi + \\ & + \varphi_{2n}(x) \frac{k}{F_n} \int_{-\infty}^x \varphi_{1n} \sum_{m=0}^\infty p_{mn} f_m d\xi. \end{aligned} \right\} \quad (23\text{ b})$$

Diesem unendlichen Integralgleichungssystem werden wir im folgenden die gesuchten f_0, f_n durch sukzessive Näherungen entnehmen. Der Beweis, daß es tatsächlich eine komplexe Funktionenfolge f_0, f_1, f_2, \dots gibt, die die Lösung des Systems (23) darstellt, kann man dadurch führen, daß man die Integrale abschätzt und zeigt, daß das damit entstehende unendlich lineare Gleichungssystem den v. KOCHSchen¹ Lösungsbedingungen genügt.

Eine Auflösung des Systems (23) im gewöhnlichen Sinne nach den f_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) ist natürlich nicht möglich. Jedoch gibt uns das bekannte Verfahren der sukzessiven Approximation die Möglichkeit, die f_n mit beliebiger Genauigkeit zu ermitteln. Hierzu gehen wir von einer ersten Näherungslösung

$$f_0, f_1, f_2, \dots, f_n, \dots \quad (24)$$

aus und setzen diese auf der rechten Seite von (23) ein und erhalten dann links eine bessere Näherung

$$\left. \begin{aligned} f_0(x) = & \varphi_{10}(x) \left\{ 1 - \frac{k}{F_0} \int_{-\infty}^x \varphi_{20} \sum_{m=1}^\infty p_{m0} f_m d\xi \right\} + \\ & + \varphi_{20}(x) \frac{k}{F_0} \int_{-\infty}^x \varphi_{10} \sum_{m=1}^\infty p_{m0} f_m d\xi, \\ f_n(x) = & \varphi_{1n}(x) \frac{k}{F_n} \int_x^\infty \varphi_{2n} \sum_{m=0}^\infty p_{mn} f_m d\xi + \\ & + \varphi_{2n}(x) \frac{k}{F_n} \int_{-\infty}^x \varphi_{1n} \sum_{m=0}^\infty p_{mn} f_m d\xi. \end{aligned} \right\} \quad (25')$$

Diese setzt man wieder rechts ein usw. die ν -te Näherung lautet damit

$$\left. \begin{aligned} f_\nu(x) = & \varphi_{10} \left\{ 1 - \frac{k}{F_0} \int_{-\infty}^x \varphi_{20} \sum_{m=1}^\infty p_{m0} f_{m_{\nu-1}} d\xi \right\} + \\ & + \varphi_{20} \frac{k}{F_0} \int_{-\infty}^x \varphi_{10} \sum_{m=1}^\infty p_{m0} f_{m_{\nu-1}} d\xi, \\ f_n(x) = & \varphi_{1n} \frac{k}{F_n} \int_x^\infty \varphi_{2n} \sum_{m=0}^\infty p_{mn} f_{m_{\nu-1}} d\xi + \\ & + \varphi_{2n} \frac{k}{F_n} \int_{-\infty}^x \varphi_{1n} \sum_{m=0}^\infty p_{mn} f_{m_{\nu-1}} d\xi \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

und es existieren die Grenzwerte

$$\begin{aligned} \lim_{\nu \rightarrow \infty} f_{0_\nu}(x) &= f_0(x) \\ \lim_{\nu \rightarrow \infty} f_{n_\nu}(x) &= f_n(x) \quad n = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned}$$

welche zugleich die Lösung für das System (23) darstellen. Der Beweis, daß das Verfahren konvergiert,

d. h. daß es den obigen Grenzwerten zustrebt und diese tatsächlich die Lösung sind, kann fast unmittelbar dem Beweis des PICARD-LINDELÖFSchen Satzes über die Existenz der Lösung von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen entnommen werden, so daß er hier überflüssig wird.

Damit ist im Prinzip das vollständige Lösungsverfahren gewonnen. Es folgt nun die Diskussion einiger bei der Auswertung auftretender Probleme insbesondere die einer besonders einfachen Näherung.

1.24 Bemerkungen zur praktischen Auswertung. Die 1. Näherung.

An sich liefert das eben entwickelte Verfahren die Funktionen f_n mit beliebiger Genauigkeit. Allerdings sind hierzu zweifach unendlich viele Schritte nötig: Die Berechnung unendlich vieler Hauptsysteme nach 1.22 und unendlich viele Iterationsschritte zur exakten Bestimmung der $f_0(x), \dots, f_n(x), \dots$. Solche Verfahren haben als Methode zur numerischen Auswertung genau so wie eine Reihenentwicklung, nur dann, oder besser, um so mehr praktischen Wert, je weniger Schritte notwendig sind, um eine gewisse Näherung zu erreichen. Es liegt auf der Hand, daß mit diesem Verfahren um so schneller eine gegebene Näherung erreicht werden kann, je stärker die FOURIER-Koeffizienten von $\mu(x, y)$ gegen 0 streben und genauer schon die bei der sukzessiven Approximation gewählte erste Näherung (24) ist. Was den ersten Gesichtspunkt betrifft, so zeigt sich bei der Ermittlung von $\mu(x, y)$ aus dem mit dem krummlinigen Koordinatensystem identischen elektrostatischen Feldbild (Abb. 1a) für einige praktische Fälle [14*], daß die FOURIER-Koeffizienten noch bei relativ kräftigen Inhomogenitäten gut konvergieren. Man kann in vielen Fällen damit rechnen, daß

$$\mu_\nu = \frac{R}{2^\nu}$$

(R beliebige beschränkte positive Zahl) gilt, so daß man selbst bei ungünstigen Betriebsverhältnissen, d. h. bei höheren Frequenzen (λ vergleichbar mit Leitungsabstand b_B), unter den Integralen in (23) nur 2 bis 3 Summenglieder und damit auch nur ebensoviele Gl. (23 b), berücksichtigen muß, um eine praktisch brauchbare Näherung zu erreichen.

Für niedrige Frequenzen ($2\pi/k \gg b_B$) wird man mit wesentlich weniger Gliedern auskommen, denn es läßt sich, wie gleich gezeigt werden wird, eine einfache erste Näherung für die Grundwelle f_0 derart finden, daß diese für abnehmende Frequenzen das Wellenfeld in der T -Leitung immer genauer und schließlich für $k \rightarrow 0$ exakt beschreibt. Dies bedeutet physikalisch, daß dann das Störfeld, das in (23) durch die $f_n(x)$ ($n \geq 1$) repräsentiert wird, immer kleiner im Vergleich zur Grundwelle wird und schließlich ganz verschwindet.

Dieses für die praktische Anwendung sehr wichtige Ergebnis läßt sich sofort der Gl. (23) entnehmen:

Man sieht, daß die rechten Seiten von (23 b) dem Frequenzparameter k proportional sind, so daß man, wie oben behauptet,

$$f_n(x) \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad k \rightarrow 0 \quad (26)$$

erhält. Bei der Grundwelle (23a) bekommt man

$$f_0(x) \rightarrow \varphi_{10}(x) \quad \text{für} \quad k \rightarrow 0. \quad (27)$$

¹ HAMEL, G.: Integralgleichungen, S. 130ff. Berlin 1937. Z. f. angew. Physik. Bd. 1.

Es geht dann die Lösung des Differentialgleichungssystems (10) in die der einfachen homogenen Differentialgleichung (14a) über. Sie genügt der in (19a) angegebenen Anfangsbedingung und wird nach der in 1.22 entwickelten Methode gewonnen.

Die ET -Inhomogenität verhält sich also bei niedrigen Frequenzen, als wenn sie nur ein längsgeschichtetes $\mu = \mu_0(x)$ enthielte. Das von der Querabhängigkeit des μ verursachte Störfeld wird dann vernachlässigbar klein.

Dieses Ergebnis ist für praktische Anwendung von großer Bedeutung, denn es gestattet, für jede beliebige ET -Inhomogenität durch einen einfachen Prozeß eine Näherungslösung für niedrige Frequenzen anzugeben. Was diese Näherung in der ursprünglichen E -Inhomogenität bedeutet, wird später erörtert werden.

Es liegt nunmehr nahe, die Lösung (26) und (27) bei Frequenzen, die nicht mehr praktisch 0 sind, unserem sukzessiven Näherungsverfahren (25) zugrunde zu legen. Wir nehmen also als erste Näherung (24)

$$f_{0i}(x) = \varphi_{10}(x), \quad f_{ni}(x) = 0 \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (28)$$

Die 2. Näherung für das Störfeld erhalten wir dann, wenn wir Gl. (28) auf der rechten Seite von Gl. (25') einsetzen, d. h. jeweils nur das Summenglied mit Index 0 berücksichtigen, also

$$\left. \begin{aligned} \text{a) } f_{0i}(x) &\equiv f_{0i}(x), \\ \text{b) } f_{n2}(x) &= \varphi_{1n}(x) \frac{k}{F_n} \int_x^\infty \varphi_{2n} p_{0n} f_{0i} d\xi + \\ &\quad + \varphi_{2n}(x) \frac{k}{F_n} \int_{-\infty}^x \varphi_{1n} p_{0n} f_{0i} d\xi. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Weitere Näherungen lassen sich dann durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens gemäß (25) finden. Da (27) die exakte Lösung bei $k = 0$ ist, kann man bei wachsender Frequenz durch stetige Hinzunahme neuer Gleichungen und weiterer Approximationsschritte der verlangten Genauigkeit gerecht werden. Daraus, daß die zweite Näherung der Grundwelle identisch mit der ersten ist (29a), ersieht man, daß diese die exakte Lösung schon recht genau approximiert, und daher für viele praktische Fälle ausreichen wird, wenn nur die Frequenz nicht allzu hoch ist.

Was die praktische Berechnung der in (25) vorkommenden uneigentlichen unbestimmten Integrale betrifft, so können diese nach Belieben durch eine der vielen graphischen und rechnerischen Methoden ausgewertet werden. Günstig erscheint dabei die Gewinnung der Integralfunktionen durch mechanische Integratoren. Natürlich muß dazu der Integrand in Kurvenform vorliegen.

1.25 Die obere Grenzfrequenz.

Es sind 2 Gesichtspunkte denkbar, die in unseren Betrachtungen die Betriebsfrequenz, repräsentiert durch k , nach oben beschränken. Der eine liegt im Wesen unserer Betrachtungsweise verankert und ist dementsprechend von der größeren Bedeutung. Er entspringt der schon erwähnten Forderung nach eindeutigem Grundwellenzustand auf beiden Seiten der

Inhomogenität. Sie verlangt nach (13)

$$k^2 < \frac{q\pi}{b_B} \cdot \frac{1}{\mu_B}$$

q = kleinste vorkommende Oberwellenordnungszahl
 $\frac{A}{B}$ je nachdem $\mu_A \geq \mu_B$.

Wird diese Bedingung verletzt, dann werden die 2 Grundbegriffe, die in [1] unseren gesamten Betrachtungen zugrunde gelegt wurden, nämlich die Impedanz- und Vierpolbegriff, sinnlos. Man darf sich dabei nicht daran stoßen, daß die Grenze (13) aus den Verhältnissen im ET -Vierpol abgeleitet wurde. Denn die rein räumliche Transformation in die ursprüngliche Leitung läßt Frequenzen ja ungeändert. Nun sind eben dann μ_A bzw. μ_B nicht mehr als verschiedene Permeabilitäten (Abb. 1b) sondern als verschiedene Leiterabstände (Abb. 1a) bei den an die Inhomogenitäten beidseitig anschließenden homogenen Leitungen zu verstehen.

Der andere Gesichtspunkt liegt in der Eigenart der in diesem Paragraphen entwickelten Lösungsverfahren begründet, ist also mehr mathematischen Charakters. Damit die Existenz der Lösung von (23) sichergestellt ist, muß nämlich verlangt werden, daß die Hauptsysteme $\varphi_{1n}(x)$ und $\varphi_{2n}(x)$, die ja Lösungen der zu (14b) gehörigen homogenen Gleichungen sind, im endlichen überall beschränkt bleiben. Dies ist nur solange der Fall, als die eckige Klammer in (14b) nirgendwo = 0 wird, d. h.

$$0 \leq k^2 < \frac{1}{\max [\mu_0(x) + \frac{1}{2} \mu_{2q}(x)]} \left(\frac{2q}{b_B} \right)^2 = k_{gr}^2 \quad (30)$$

q = kleinster vorkommender Index.

Ist $\max [\mu_0(x) + \frac{1}{2} \mu_{2q}(x)]$ gleich μ_A oder μ_B , dann erhalten wir wieder (13). Treten dagegen hohe μ_0 bzw. μ_{2q} -Spitzen auf, dann wird die Schranke (30) wesentlich niedriger liegen als die durch (13) definierte.

Diese an sich aus rein mathematischen Erwägungen abgeleitete Forderung hat jedoch auch eine physikalische Bedeutung. Überschreitet k den Wert k_{gr} , dann wird in der ersten Gl. (14b) die eckige Klammer negativ. Dem entspricht eine Welle höherer Ordnung, die sich nicht unbedingt nach beiden Seiten ins Unendliche ausbreiten braucht, wie man es normalerweise gewöhnt ist, sondern durchaus auf eine gewisse Strecke längs x im Innern der T -Inhomogenität begrenzt sein kann (Abb. 3), solange eben die Klammer < 0 ist. Man kann somit (30) physikalisch folgendermaßen formulieren: Die Betriebsfrequenz muß so niedrig sein, daß nirgendwo auch nur örtlich begrenzte Wellenzustände innerhalb der ET -Inhomogenität auftreten können. Dem Auftreten von Oberwellen im ET -Vierpol entspricht natürlich auch in der ursprünglichen Inhomogenität eine irgendwie in Erscheinung tretende Nebenwelle. Dem Stutzen (Abb. 3a) im ursprünglichen Vierpol entspricht eine hohe μ -Konzentration im ET -Vierpol. $\max (\mu_0 + \frac{1}{2} \mu_{2q})$ ist wesentlich größer als $\mu_A = \mu_0 = 1$. Solange k genügend klein gegenüber k_{gr} gibt es im Gebiet der μ -Konzentration nur exponentielle Wechselfelder höherer Ordnung. Das Störfeld ist klein und die Wellenfront verläuft im ursprünglichen Rohr noch annähernd längs der statischen Feldlinien. Übersteigt die Frequenz eine gewisse Grenze, dann breitet sich die Störfeldkomponente niedrigster Ordnung im Gebiet

der Konzentration als zusätzliche Querwelle aus. Im ursprünglichen Rohr bedeutet das, daß sich nun im Stutzen eine stehende Welle zusätzlich zur durchgehenden Grundwelle ausbildet.

1.26 Der Übergang von Bandleitung auf Hohlrohr.

Alle bisherigen Betrachtungen und Ergebnisse beziehen sich auf eine inhomogene Bandleitung nach Abb. 1. Man erhält die gleichen Resultate für das inhomogene Hohlrohr durch die einfache Frequenztransformation [Gl. (34*)]. Man braucht zu diesem Zweck nur überall k durch k_{10} zu ersetzen. Gilt z. B. die erste Näherung für die Bandleitung (Abschnitt 1.24) exakt bei

$$k = 0 \quad \lambda = \infty \quad \omega = 0,$$

dann ist dies beim Hohlrohr der Fall bei

$$k_{10} = 0 \quad \lambda = 2a \quad \omega = \frac{\pi c}{a};$$

c = Lichtgeschwindigkeit, a = Hohlrohrbreite.

Oder ist nach (30) der nutzbare Frequenzbereich bei der Bandleitung festgelegt durch

$$0 < k^2 < k_{gr}^2,$$

dann entspricht dem beim Hohlrohr der Bereich

$$0 < k_{10}^2 < k_{gr}^2$$

oder

$$\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 < k^2 < k_{gr}^2 + \left(\frac{\pi}{a}\right)^2.$$

Die Bezeichnungen „niedrige“ bzw. „hohe Frequenzen“ muß man sich ersetzt denken durch „Frequenzen nahe der H_{10} -Grenzfrequenz“ bzw. „groß gegen die H_{10} -Grenzfrequenz des homogenen Rechteckrohrs“.

2. Das Feld im ursprünglichen Vierpol.

2.1 Das Feld im allgemeinen.

Das in 1. entwickelte Verfahren gestattet die Berechnung der H_z -Komponente des magnetischen Feldes der T -Inhomogenität mit beliebiger Genauigkeit. Hat man einmal die x -Abhängigkeiten $f_0(x)$, $f_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) mit Hilfe der in 1.2 dargelegten Methode festgestellt, dann erhält man die H_z -Komponente ohne weiteres aus (8). Alle übrigen Feldkomponenten erhält man für die Bandleitung aus den Gl. (6 b und c) für das Hohlrohr aus (2) bis (5) durch einfache Differentiation. Damit ist das Gesamtfeld des ET -Vierpols bekannt.

Die entsprechenden Feldkomponenten des ursprünglichen Vierpols bezogen auf die krummlinigen Koordinaten bekommt man an jeder Stelle des J -Bereiches durch Division mit $K(x, y) = \sqrt{\mu(x, y)}$ [Gl. (23*)]. Dadurch ist dann das eigentliche Vierpolfeld ermittelt.

2.2 Verhalten bei niedrigen Frequenzen.

Wir beziehen diese Betrachtungen der Einfachheit halber wieder auf die Bandleitung; sie können dann leicht nach dem in 1.26 Gesagten auf das Hohlrohr übertragen werden.

Bei niedrigen Frequenzen, die im Gültigkeitsbereich der in 1.24 besprochenen ersten Näherung liegen, ist der Anteil des Störfeldes in der T -Inho-

mogenität sehr klein. Dies bedeutet, daß im ursprünglichen Vierpol die Wellenfront des elektrischen Feldes praktisch mit den elektrostatischen Feldlinien (Abb. 1a) zusammenfällt, da ja im ET -Vierpol keine nennenswerte E_x -Komponente auftritt. Die elektrischen Feldlinien der durchgehenden Welle sind dann zeitunabhängig bzw. weichen nur ganz wenig in periodischen Schwankungen von ihrer Ruhelage ab und zwar am meisten an Stellen, wo die Flächenelemente des elektrostatischen Feldes besonders stark von dem Normalelement abweichen (in Abb. 1a als kritischer Bereich bezeichnet). An Ecken und tiefen Ausbuchtungen erreicht das Störfeld am ehesten nennenswerte Größe und stellt die Brauchbarkeit der ersten

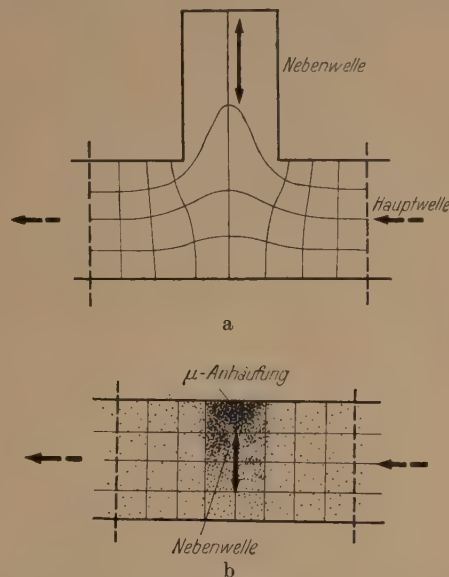


Abb. 3 a u. b. Nebenwellenbildung bei starken Inhomogenitäten.
a Ursprüngliche Inhomogenität; b transformierte Inhomogenität.

Näherung in Frage. Je sanfter demnach eine Inhomogenität verläuft, desto länger gilt diese einfache Näherung. Man wird aus diesem Grunde, ganz abgesehen von der Spannungsfestigkeit, scharfe Ecken usw. vermeiden. Es zeigt sich, daß man schon durch geringe Abrundungen den $K(x, y)$ -Verlauf in der y -Richtung erheblich nivellieren kann.

2.3 Die Impedanztransformation.

Die praktisch wichtigste Frage, die wir jetzt allgemein beantworten können, ist die nach der Impedanztransformation des Vierpols. In [1] ist festgelegt worden, was wir darunter verstehen wollen. Es wurden in der gegebenen Inhomogenität (Abb. 1a) 2 Bezugsebenen I und II eingeführt, die den I -Bereich abgrenzen. Sie mögen im Abstand l_A und l_B vom Fußpunkt einer willkürlich gewählten Koordinatennulllinie liegen. Im entsprechenden ET -Vierpol haben dann die beiden Bezugsebenen den Abstand l_A bzw. l_B von der zugehörigen Nullgeraden (Abb. 1b). Die Impedanztransformation ergibt sich wie folgt:

Gegeben sei der Abschlußwiderstand $R_B = E'/H' = E/H$ (E' , H' = Transversalkomponenten in Bezugsebene II des ursprünglichen Vierpols; E , H = d. to des ET -Vierpols). Aus diesem lassen sich die komplexen Amplituden \mathfrak{B}_{10} und \mathfrak{B}_{20} des zugehörigen Grundwellenzustandes in der T -Leitung bezogen auf die

Nulllinie berechnen durch

$$\frac{\mathfrak{B}_{20}}{\mathfrak{B}_{10}} = \frac{1 + r_B}{1 - r_B} e^{-2jk_B l_B}; \quad k_B = k \cdot \mu_B,$$

$$r_B = \frac{\mathfrak{B}_B}{Z_B}; \quad Z_B = \sqrt{\mu_B} Z_0 = Z_0 \text{ da } \mu_B = 1.$$

Damit ist Grundwellenzustand auf Seite B gegeben:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_0(x) = \varphi_{10}(x) = \mathfrak{B}_{10} e^{-jk_B x} + \mathfrak{B}_{20} e^{jk_B x}.$$

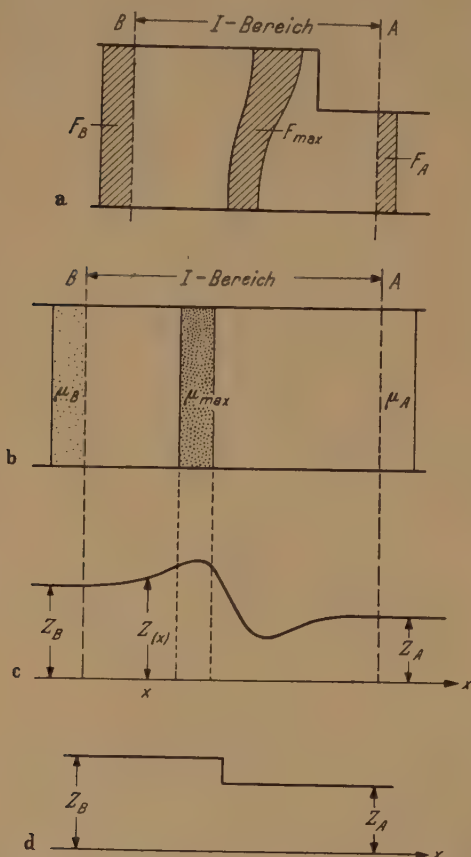


Abb. 4a-d. Äquivalenz einer Inhomogenität mit einer Leitung mit veränderlichem Z bei niedrigen Frequenzen.

Gesucht ist nun zunächst der Grundwellenzustand auf Seite A:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_0(x) = \mathfrak{A}_{10} e^{-jk_A x} + \mathfrak{A}_{20} e^{jk_A x}.$$

Aus (23a) erhalten wir sofort

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_0(x) = \varphi_{10} \left\{ 1 - \frac{k}{F_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{20} \sum_{m=1}^{\infty} p_{m0} f_m dx \right\} + \left\{ \varphi_{20} \frac{k}{F_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{10} \sum_{m=1}^{\infty} p_{m0} f_m dx \right\} \quad (31)$$

Setzen wir abkürzend

$$\alpha' = \frac{1}{F_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{20} \sum_{m=1}^{\infty} p_{m0} f_m dx$$

$$\alpha'' = \frac{1}{F_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{10} \sum_{m=1}^{\infty} p_{m0} f_m dx$$

α' und α'' komplexe Zahlen!

dann liefert (31) unter Berücksichtigung der 2. Zeile von (19a) und der 1. Zeile von (20a)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_0(x) = \mathfrak{A}_{10} e^{-jk_A x} + \mathfrak{A}_{20} e^{jk_A x} = (\mathfrak{A}'_{10} e^{-jk_A x} + \mathfrak{A}'_{20} e^{jk_A x}) (1 - k\alpha') + (\mathfrak{A}''_{10} e^{-jk_A x} + \mathfrak{A}''_{20} e^{jk_A x}) \cdot k\alpha''.$$

Hieraus

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \mathfrak{A}_{10} &= \mathfrak{A}'_{10} (1 - k\alpha') + k\alpha'' \mathfrak{A}''_{10}, \\ \text{b)} \quad \mathfrak{A}_{20} &= \mathfrak{A}'_{20} (1 - k\alpha') + k\alpha'' \mathfrak{A}''_{20}. \end{aligned} \quad (32)$$

Für $k \rightarrow 0$ erhalten wir

$$\mathfrak{A}_{10} \rightarrow \mathfrak{A}'_{10}, \quad \mathfrak{A}_{20} \rightarrow \mathfrak{A}'_{20},$$

also wieder die erste Näherung (27).

Den eingangsseitigen Feldwiderstand erhalten wir aus den komplexen Amplituden (32)

$$\mathfrak{R}_A = \frac{1 + \frac{\mathfrak{A}_{20}}{\mathfrak{A}_{10}} e^{2jk_A l_A}}{1 - \frac{\mathfrak{A}_{20}}{\mathfrak{A}_{10}} e^{2jk_A l_A}} \cdot Z_A; \quad Z_A = \sqrt{\mu_A} \cdot Z_0.$$

Derselbe Wert \mathfrak{R}_A erscheint dann beim ursprünglichen Vierpol in der Ebene I im Abstand l_A von der Nulllinie.

Bei genügend niedrigen Frequenzen verhält sich die ET -Inhomogenität praktisch so, als wenn sie nur mit einem längsgeschichteten $\mu = \mu_0(x)$ angefüllt wäre (s. 1.24). Man kann daher z. B. die Stoßstelle der Abb. 1a zur Auffindung der Impedanztransformation als ein Leitungsstück mit stetig verteiltem Feldwellenwiderstand $Z(x)$ auffassen (Abb. 4b und c). Stellen großer Flächen zwischen 2 Feldlinien (Abb. 4a) entsprechen Stellen mit hohem μ_0 (Abb. 4b) bzw. großem Z (Abb. 4c) und zwar ist μ_0 zahlenmäßig gleich der auf F_B bezogenen Fläche des entsprechenden Streifens. Auf diese Weise kann man für jede beliebige E -Inhomogenität die Funktion $\mu_0(x)$ graphisch mit jeder gewünschten Genauigkeit aus einer Zeichnung nach Art der Abb. 4 gewinnen. Für sehr niedrige Frequenzen ($h \rightarrow 0$) wirkt die Stoßstelle wie ein Wellenwiderstandssprung (Abb. 4d).

3. Das Feld des HT -Vierpols.

Ähnlich wie in 1. gehört zu jeder H -Inhomogenität, beispielsweise einer Blende, deren Längsschnitt Abb. 5a zeigt, bei Anregung mit der H_{10} -Welle eine transformierte (HT -) Inhomogenität (Abb. 5b) mit folgenden Eigenschaften [1]:

1. Ihre leitenden Begrenzungen sind eben.
2. Innerhalb des I -Bereiches ist sie mit einem ortsabhängigen, isotropen $\varepsilon(x, z)$ angefüllt ($\varepsilon(x, z) = HT$ -Funktion).
3. Die Permeabilität ist überall gleich Π_0 .
4. Für die ε -Verteilung gilt sinngemäß das gleiche wie für die μ -Verteilung der ET -Inhomogenität.
5. Das Feld im HT -Vierpol wird durch folgendes Differentialgleichungssystem bestimmt [1]:

$$\frac{\partial^2 E_y(x, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y(x, z)}{\partial z^2} + \varepsilon(x, z) k^2 E_y(x, z) = 0; \quad (33)$$

$$j\omega \Pi_0 H_x(x, z) = \frac{\partial E_y(x, z)}{\partial z}; \quad (34)$$

$$j\omega \Pi_0 H_z(x, z) = -\frac{\partial E_y(x, z)}{\partial x}; \quad (35)$$

$$\text{Randbedingung } E_y = H_z = \frac{\partial H_x}{\partial y} = 0 \text{ für } z = 0, a_A. \quad (36)$$

Eine Äquivalenz zu einer Bandleitung existiert hier natürlich nicht, da das Rohr immer eine endliche Breite haben muß. Wir nehmen wieder an, von rechts alle eine H_{10} -Welle ein, links sei in großer Entfernung irgendein komplexer Verbraucher angeschlossen. Wir suchen unter diesen Bedingungen die Lösung der Differentialgleichung (33).

3.1 Die Aufspaltung von (33)

in ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen.

Wir haben also

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + \varepsilon(x, z) k^2 E_y = 0$$

mit den Nebenbedingungen

$$\left. \begin{aligned} E_y &= 0 \quad \text{für } z = 0, a_A, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} E_y &= \mathfrak{B}_{11} e^{-j k_{10} B x} + \mathfrak{B}_{21} e^{j k_{10} B x} \end{aligned} \right\} (33')$$

Dabei ist

$$k_{10B} = \sqrt{k^2 \varepsilon_B - \left(\frac{\pi}{a_A}\right)^2}; \quad \varepsilon_B = \lim_{x \rightarrow -\infty} M^2(x, z) = \text{const.}$$

Der Ansatz

$$E_y(x, z) = \sum_{m=1}^{\infty} g_m(x) \sin \frac{m\pi}{a_A} z \quad (37)$$

befriedigt die Randbedingung (36).

Weiterhin kann man $\varepsilon(x, z) = M^2(x, z)$ in folgende FOURIER-Reihe zerlegen

$$\varepsilon(x, z) = \varepsilon_0(x) + \sum_{v=1}^{\infty} \varepsilon_v(x) \cos \frac{v\pi}{a_A} z, \quad (38)$$

wobei bekanntlich

$$\varepsilon_0(x) = \frac{1}{a_A} \int_{z=0}^{z=a_A} \varepsilon(x, z) dz,$$

$$\varepsilon_v(x) = \frac{2}{a_A} \int_{z=0}^{z=a_A} \varepsilon(x, z) \cos \frac{v\pi}{a_A} z dz \quad v = 1, 2, 3, \dots$$

und dann mit (37) und (38) in (33) eingehen:

$$\begin{aligned} &\sum_{m=1}^{\infty} g_m''(x) \sin \frac{m\pi}{a_A} z - \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{m\pi}{a_A}\right)^2 g_m(x) \sin \frac{m\pi}{a_A} z + \\ &+ k^2 \left[\varepsilon_0(x) + \sum_{v=1}^{\infty} \varepsilon_v(x) \cos \frac{v\pi}{a_A} z \right] \sum_{m=1}^{\infty} g_m(x) \sin \frac{m\pi}{a_A} z = 0. \end{aligned}$$

Indem wir die Glieder gleicher Ordnung zusammenfassen und berücksichtigen, daß

$$\begin{aligned} &\cos \frac{v\pi}{a_A} z \sin \frac{m\pi}{a_A} z \\ &= \frac{1}{2} \left[\sin(v+m) \frac{\pi}{a_A} z - \sin(v-m) \frac{\pi}{a_A} z \right] \end{aligned}$$

erhalten wir folgendes unendliche System linearer Differentialgleichungen

$$\left. \begin{aligned} &g_n''(x) - \left[\left(\frac{n\pi}{a_A}\right)^2 - k^2 \left(\varepsilon_0(x) - \frac{1}{2} \varepsilon_{2n}(x) \right) \right] g_n(x) \\ &= \frac{k^2}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \delta_{mn} (\varepsilon_{|n-m|}(x) + \varepsilon_{n+m}(x)) g_m(x) \\ &n = 1, 2, 3, \dots \quad \delta_{mn} = \begin{cases} 0 & m = n \\ 1 & m \neq n \end{cases} \end{aligned} \right\} (39)$$

mit den Nebenbedingungen

$$\left. \begin{aligned} a) \quad &g_1(x) \rightarrow \mathfrak{B}_{11} e^{-j k_{10} B x} + \mathfrak{B}_{21} e^{j k_{10} B x} \quad \text{für } x \rightarrow -\infty, \\ b) \quad &\begin{cases} g_n(x) \rightarrow \mathfrak{B}_{2n} e^{k_{n0} B x} & \text{für } x \rightarrow -\infty, \\ g_n(x) \rightarrow \mathfrak{A}_{1n} e^{-k_{n0} A x} & \text{für } x \rightarrow +\infty, \end{cases} \\ &n = 2, 3, 4, \dots \\ c) \quad &k_{10A} [\text{s. Gl. (33')}] \text{ reell zumindest für } A \text{ oder } B, \\ d) \quad &k_{n0A} = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a_A}\right)^2 - k^2 \varepsilon_A} \text{ reell für } A \text{ und } B. \end{aligned} \right\} (40)$$

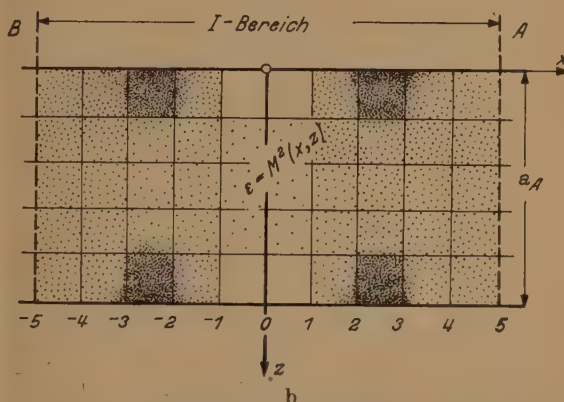
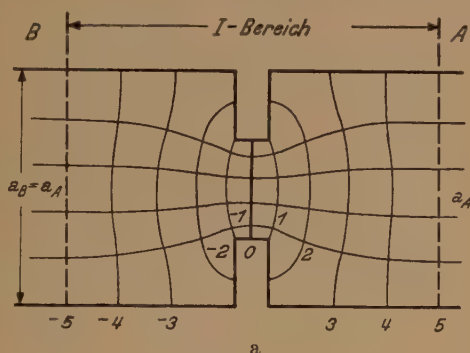


Abb. 5a u. b. Symmetrische H-Inhomogenität. a Ursprüngliche, b transformierte.

Die $g_n(x)$ sind im allgemeinen eine Folge komplexer Funktionen und stellen nach (37) die Längsabhängigkeit des elektrischen Feldes dar. Der Anteil der Grundwelle wird durch $g_1(x)$, der des Störfeldes durch $g_n(x)$ ($n = 2, 3, 4, \dots$) repräsentiert.

3.2 Die Lösung

des unendlichen Differentialgleichungssystems.

Die HT-Funktion hat, da sie genau so wie die ET-Funktion definiert wurde, dieselben Eigenschaften wie sie in 1.21 für $\mu(x, y)$ beschrieben wurden.

Die Nebenbedingung (40c), die physikalisch besagt, daß mindestens auf einer der beiden Seiten das Grund- (H_{10} -) Feld als Welle bestehen soll, setzt dem Frequenzparameter k eine untere Grenze > 0 . Demgegenüber enthält Gl. (40d) die Forderung, daß das Störfeld auf beiden Seiten exponentiell abklingen soll, und liefert vorläufig die obere Grenze für k .

Der damit festgelegte k -Bereich lautet

$$\frac{1}{\varepsilon_A} \left(\frac{\pi}{a_A} \right)^2 < k^2 < \left(\frac{\pi}{a_A} \right)^2 \frac{1}{\varepsilon_B} \quad (41)$$

$\frac{A}{B}$ je nachdem $\varepsilon_A \geq \varepsilon_B$,
 r = kleinster vorkommender Index = 2.

Auch hier braucht man zur Lösung von (39) linear unabhängige Integrale der zugehörigen homogenen Differentialgleichungen (rechte Seite = 0 gesetzt). Die diesbezüglichen Ausführungen in 1.22 bleiben gültig.

Zur Lösung führen wir die Abkürzung

$$q_{mn}(x) = \frac{1}{2} \delta_{mn} (\varepsilon_{|n-m|}(x) - \varepsilon_{n+m}(x))$$

ein und schreiben das System (39) in der Form

$$\left. \begin{aligned} \text{a) } g_1''(x) - \left[\left(\frac{\pi}{a_A} \right)^2 - k^2 \left(\varepsilon_0 - \frac{1}{2} \varepsilon_2 \right) \right] g_1(x) \\ = k^2 \sum_{m=1}^{\infty} q_{m1} g_m(x), \\ \text{b) } g_n''(x) - \left[\left(\frac{n\pi}{a_A} \right)^2 - k^2 \left(\varepsilon_0 - \frac{1}{2} \varepsilon_{2n} \right) \right] g_n(x) \\ = k^2 \sum_{m=1}^{\infty} q_{mn} g_m(x); \quad n = 2, 3, 4, \dots \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

um Grundwelle (42a) und Störfeld (42b) deutlich voneinander zu unterscheiden.

Es sei für jede Gl. (42) bei der Betriebsfrequenz k ein zugehöriges Hauptsystem

$$\begin{aligned} \psi_{11}(x), \quad \psi_{21}(x), \\ \psi_{1n}(x), \quad \psi_{2n}(x) \quad n = 2, 3, 4, \dots \end{aligned}$$

berechnet, derart daß

$$\left. \begin{aligned} \text{a) } \psi_{11}(x) &\rightarrow \mathfrak{B}_{11}' e^{-jk_{10B}x} + \mathfrak{B}_{21}' e^{jk_{10B}x}; \\ &\quad x \rightarrow -\infty, \\ \text{b) } \psi_{21}(x) &\rightarrow \mathfrak{A}_{11}'' e^{-jk_{10A}x} + \mathfrak{A}_{21}'' e^{jk_{10A}x}; \\ &\quad x \rightarrow +\infty, \\ \text{c) } \psi_{1n}(x) &\rightarrow e^{kn_{0B}x}; \quad x \rightarrow -\infty. \\ \text{d) } \psi_{2n}(x) &\rightarrow e^{-kn_{0B}x}; \quad x \rightarrow +\infty \end{aligned} \right\} n = 2, 3, 4, \dots \quad (43)$$

Dabei sind $\mathfrak{B}_{11}' = \mathfrak{B}_{11}$ und $\mathfrak{B}_{21}' = \mathfrak{B}_{21}$ die vom Verbraucher vorgeschriebenen komplexen Amplituden auf Seite B , während \mathfrak{A}_{11}'' und \mathfrak{A}_{21}'' an sich frei wählbare Größen sind, denen man jedoch zweckmäßig den Wert $\mathfrak{A}_{11}'' = \mathfrak{B}_{21}$ und $\mathfrak{A}_{21}'' = \mathfrak{B}_{11}$ gibt. Die zu (43) komplementären Randfunktionen sind dann bekannt und mögen

$$\left. \begin{aligned} \text{a) } \psi_{11}(x) &\rightarrow \mathfrak{A}_{11}' e^{-jk_{10A}x} + \mathfrak{A}_{21}' e^{jk_{10A}x}; \\ &\quad x \rightarrow +\infty, \\ \text{b) } \psi_{21}(x) &\rightarrow \mathfrak{B}_{11}'' e^{-jk_{10B}x} + \mathfrak{B}_{21}'' e^{jk_{10B}x}; \\ &\quad x \rightarrow -\infty, \\ \text{c) } \psi_{1n}(x) &\rightarrow \mathfrak{A}_{1n}' e^{-kn_{0A}x} + \mathfrak{A}_{2n}' e^{kn_{0A}x}; \\ &\quad x \rightarrow +\infty, \\ \text{d) } \psi_{2n}(x) &\rightarrow \mathfrak{B}_{1n}'' e^{-kn_{0B}x} + \mathfrak{B}_{2n}'' e^{kn_{0B}x}; \\ &\quad x \rightarrow -\infty \quad n = 2, 3, 4, \dots \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

n.

Auf die so bestimmten Hauptsysteme kann man wie in 1.23, das Verfahren der Variation der Konstanten anwenden und erhält völlig analog dazu

$$\left. \begin{aligned} \text{a) } g_1(x) &= \psi_{11}(x) \left\{ 1 - \frac{k}{F_1} \int_{-\infty}^x \psi_{21} \sum_{m=1}^{\infty} q_{m1} g_m d\xi \right\} + \\ &\quad + \psi_{21}(x) \frac{k}{F_1} \int_{-\infty}^x \psi_{11} \sum_{m=1}^{\infty} q_{m1} g_m d\xi, \\ \text{b) } g_n(x) &= \psi_{1n}(x) \frac{k}{F_n} \int_{-\infty}^x \psi_{2n} \sum_{m=1}^{\infty} q_{mn} g_m d\xi + \\ &\quad + \psi_{2n}(x) \frac{k}{F_n} \int_{-\infty}^x \psi_{1n} \sum_{m=1}^{\infty} q_{mn} g_m d\xi, \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} F_1 &= 2j k_{10B} (\mathfrak{B}_{11} \mathfrak{B}_{21}' - \mathfrak{B}_{11}' \mathfrak{B}_{21}); \\ F_n &= -2 k_{n0B} \mathfrak{B}_{1n}'. \end{aligned}$$

Diesem Integralgleichungssystem wird man die Lösung g_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) wieder durch sukzessive Näherung entnehmen.

Bedeutet

$$g_1, g_2, \dots, g_n, \dots \quad (46)$$

eine zunächst beliebige erste Näherung, dann erhält man analog zu Gl. (25) bessere Näherungen durch die Rekursionsformel

$$\left. \begin{aligned} \text{a) } g_{1v}(x) &= \psi_{11} \left\{ 1 - \frac{k}{F_1} \int_{-\infty}^x \psi_{21} \sum_{m=1}^{\infty} q_{m1} g_{mv-1} d\xi \right\} + \\ &\quad + \psi_{21} \frac{k}{F_1} \int_{-\infty}^x \psi_{11} \sum_{m=1}^{\infty} q_{m1} g_{mv-1} d\xi, \\ \text{b) } g_{nv}(x) &= \psi_{1n} \frac{k}{F_n} \int_{-\infty}^x \psi_{2n} \sum_{m=1}^{\infty} q_{mn} g_{mv-1} d\xi + \\ &\quad + \psi_{2n} \frac{k}{F_n} \int_{-\infty}^x \psi_{1n} \sum_{m=1}^{\infty} q_{mn} g_{mv-1} d\xi. \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Die Grenzwerte

$$\begin{aligned} \lim_{v \rightarrow \infty} g_{1v}(x) &= g_1(x) \\ \lim_{v \rightarrow \infty} g_{nv}(x) &= g_n(x); \quad n = 2, 3, 4, \dots \end{aligned}$$

stellen dann die Lösungsfunktionen von (45) dar.

Den geeigneten Ansatzpunkt für die sukzessive Näherung stellt wieder die Lösung von (45) dar, wenn auf der rechten Seite $k = 0$ gesetzt wird.

$$\left. \begin{aligned} \text{a) } g_{11}(x) &= \psi_{11}(x) \\ \text{b) } g_{n1}(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{für } k \rightarrow 0. \quad (48)$$

Benützen wir (48) als erste Näherung nach (46), dann bekommt man als zweite

$$\left. \begin{aligned} \text{a) } g_{11}(x) &= \psi_{11}(x) = g_{11}(x), \\ \text{b) } g_{n1}(x) &= \psi_{1n} \frac{k}{F_n} \int_{-\infty}^x \psi_{2n} g_{11} g_{11} d\xi + \\ &\quad + \psi_{2n} \frac{k}{F_n} \int_{-\infty}^x \psi_{1n} g_{11} g_{11} d\xi. \end{aligned} \right\}$$

Weitere Näherungen gewinnt man daraus mit (47).

Leider hat die einfache erste Näherung (48) bei den H -Inhomogenitäten bei weitem nicht die praktische Bedeutung wie bei den E -Inhomogenitäten. Man darf nämlich annehmen, daß bei praktisch allen Anwendungen zumindest auf einer Seite des Vierpols, wenn nicht auf beiden, das Grundfeld als Welle existieren muß. Hierzu muß die Frequenz über der H_{10} -Grenzfrequenz des angrenzenden Rohrs liegen, d. h. aber: $k \approx 0$ ist nicht mehr erfüllt. Will man sich z. B. wenigstens auf einer Seite einen Wellenzustand sichern, so muß k über der in (41) gesetzten unteren Grenze liegen. Dies bedeutet jedoch, daß (48) nur selten unmittelbar herangezogen werden kann, so daß weitere Näherungen errechnet werden müssen.

Was die obere Grenzfrequenz betrifft, so wird sie auch hier durch die in 1.25 dargelegten Erwägungen bestimmt. Aus der Forderung, daß die eckige Klammer auf der linken Seite der ersten Gl. (42b) nirgends $= 0$ werden darf, ergibt sich mit (41) der endgültige nutzbare Frequenzbereich zu

$$\frac{1}{\varepsilon_A} \left(\frac{\pi}{a_A} \right)^2 < k^2 < \frac{1}{\max[\varepsilon_0 - \frac{1}{2} \varepsilon_{2r}]} \left(\frac{r \pi}{a_A} \right)^2 \quad (49)$$

$\frac{A}{B}$ je nachdem $\varepsilon_A \geq \varepsilon_B$,

$r =$ kleinster vorkommender Index $n \geq 2$.

Dieser Bereich kann natürlich sehr klein ja sogar zu Null werden, wenn extrem hohe $\max(\varepsilon_0 - \frac{1}{2} \varepsilon_{2r})$ auftreten. Damit ist man sicher, daß das mathematische Lösungsverfahren funktioniert. Physikalisch wird dadurch jegliches Auftreten von Wellen höherer Ordnung in- und außerhalb des HT -Vierpols und damit auch der ursprünglichen Inhomogenität verhindert.

4. Das Feld im ursprünglichen Vierpol.

Das in 3.2 entwickelte Verfahren erlaubt die Berechnung der E_y -Komponente des elektrischen Feldes der T -Inhomogenität mit beliebiger Genauigkeit. Zuerst ermittelt man nach 3.2 die x -Abhängigkeiten $g_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) des Grund- und Störfeldes und setzt diese dann mit (37) zum E_y -Verlauf zusammen. Die zwei anderen Feldkomponenten (H_x, H_z) ergeben sich hieraus nach (34) und (35) durch einfache Differentiation. Damit ist das gesamte Feld des HT -Vierpols bekannt.

Das Feld im ursprünglichen Rohr gewinnt man theoretisch durch Division der einzelnen Feldkomponenten durch $M(x, z) = \sqrt{\varepsilon(x, z)}$ und Eintragung in das krummlinige Koordinatensystem nach Abb. 5a. Auch hier geht das Störfeld mit verschwindender Frequenz gegen Null und es bleibt nur noch die durch M dividierte und ins krummlinige System eingetragene H_{10} -Feld des HT -Vierpols übrig. Die relative Feldverteilung bleibt dann über die ganze Periode konstant und wir haben wieder zeitunabhängige Feldlinien. Leider fällt diese einfache erste Näherung nicht mehr ohne weiteres in den nutzbaren Frequenzbereich (49), so daß sie im allgemeinen von geringem praktischen Wert ist. Wir müssen damit rechnen, daß in diesem Bereich das Störfeld dem Grundfeld gegenüber mehr oder weniger stark ins Gewicht fällt und daher einerseits mathematisch mehrere Näherungsschritte notwendig sein, anderer-

seits physikalisch keine zeitunabhängigen Feldlinien mehr bestehen werden; das letztere bedeutet eben, daß die relative Feldverteilung periodischen Schwankungen unterworfen ist und erheblich von der Verteilung bei sehr kleinen Frequenzen abweichen kann.

Wie man in der Praxis die oben erwähnte Übertragung des transformierten Feldes in das krummlinige System des ursprünglichen Rohrs durchführt, soll uns hier nicht beschäftigen, da das Feld als solches im Vergleich zur Impedanztransformation meist wenig interessiert. Letztere kann jedoch aus den Verhältnissen im T -Rohr direkt abgeleitet werden.

Ihre Berechnung verläuft ganz ähnlich wie beim E -Vierpol. Es sei in der Bezugsebene II z. B. der Abb. 5 diesmal der Feldleitwert $\mathfrak{G}_B = H_z/E_y$ gegeben. Dann erhält man wieder die komplexen Amplituden des Grundwellenzustands im HT -Rohr (Abb. 5b) bezogen auf die dortige Nulllinie durch

$$\frac{\mathfrak{B}_{21}}{\mathfrak{B}_{11}} = \frac{1 + \mathfrak{G}_B}{1 - \mathfrak{G}_B} e^{-2jk_{10B} \cdot l_B};$$

$$\mathfrak{G}_B = \frac{\mathfrak{G}_B}{Z_{10B}}; \quad Z_{10B} = Z_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_B - \left(\frac{\pi}{k \cdot a_B} \right)^2}}$$

und hat somit auf Seite B die Anfangsbedingung für die Grundwelle (diesmal bezüglich E_y)

$$g_1(x) = \mathfrak{B}_{11} e^{-jk_{10B} x} + \mathfrak{B}_{21} e^{jk_{10B} x}; \quad x \rightarrow -\infty$$

den entsprechenden Grundwellenzustand auf Seite A bekommt man dann aus (45a) durch

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g_1(x) = \left. \begin{aligned} &= \psi_{11}(x) \left\{ 1 - \frac{k}{F_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{21} \sum_{m=1}^{\infty} q_{mn} g_m dx \right\} + \\ &+ \psi_{21}(x) \frac{k}{F_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{11} \sum_{m=1}^{\infty} q_{mn} g_m dx. \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Mit der Abkürzung

$$\beta' = \frac{1}{F_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{21} \sum_{m=1}^{\infty} q_{mn} g_m dx$$

$$\beta'' = \frac{1}{F_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{11} \sum_{m=1}^{\infty} q_{mn} g_m dx$$

β' und β'' komplexe Zahlen

liefert (50) unter Berücksichtigung von (44a) und (43b)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g_1(x) = \mathfrak{A}_{11} e^{-jk_{10A} x} + \mathfrak{A}_{21} e^{jk_{10A} x}$$

$$= (\mathfrak{A}'_{11} e^{-jk_{10A} x} + \mathfrak{A}'_{21} e^{jk_{10A} x}) (1 - k\beta') +$$

$$+ (\mathfrak{A}''_{11} e^{-jk_{10A} x} + \mathfrak{A}''_{21} e^{jk_{10A} x}) k\beta''.$$

Hieraus

$$a) \quad \mathfrak{A}_{11} = \mathfrak{A}'_{11} (1 - k\beta') + k\beta'' \mathfrak{A}''_{11},$$

$$b) \quad \mathfrak{A}_{21} = \mathfrak{A}'_{21} (1 - k\beta') + k\beta'' \mathfrak{A}''_{21}.$$

Mit Hilfe der eben ermittelten komplexen Amplituden auf Seite A erhalten wir den zugehörigen Feldleitwert

der Ebene I (Abb. 5) durch

$$\mathfrak{G}_A = \frac{1 + \frac{\mathfrak{U}_{21}}{\mathfrak{U}_{11}} e^{2jk_{10A}l_A}}{1 - \frac{\mathfrak{U}_{21}}{\mathfrak{U}_{11}} e^{2jk_{10A}l_A}} \cdot Z_{10A};$$

$$Z_{10A} = Z_0 \frac{1}{\sqrt{\epsilon_A - \left(\frac{\pi}{ka_A}\right)^2}},$$

damit ist die Impedanztransformation $\mathfrak{G}_A = \mathfrak{T}\{\mathfrak{G}_B\}$ des ursprünglichen H -Vierpols bestimmt.

Zusammenfassung.

In dieser Arbeit wurde ein Verfahren entwickelt, das es gestattet, mit dem in [1] abgeleiteten Begriff der transformierten Inhomogenität das elektromagnetische Feld zweier recht allgemeiner Inhomogenitätsklassen, der E - und H -Vierpole, zu berechnen. Es ist natürlich ein Approximationsverfahren, jedoch läßt sich prinzipiell das Feld beliebig genau ermitteln. Es ist zwar denkbar, daß sich in Sonderfällen die vorkommenden Integrale geschlossen auswerten lassen, im allgemeinen kann jedoch nicht damit gerechnet werden. Es ist daher mit Absicht nicht näher auf die Auswertung derselben eingegangen worden, sondern es bleibt einem im Einzelfall überlassen, ein passendes numerisches, graphisches oder mechanisches Integrationsverfahren zu wählen, zumal die Integrale, zumindest bei den E -Inhomogenitäten, in den meisten Fällen bloß Korrekturgrößen darstellen werden. Die anschauliche erste Näherung, die verhältnismäßig leicht ermittelt werden kann, wird oft vollauf genügen. Leider war es auf Grund ungünstiger Umstände nicht mehr möglich, Zahlenbeispiele zu bringen. Der Verfasser hofft dies in einer späteren Arbeit nachholen zu können.

Der Begriff der transformierten Inhomogenität der zum erstenmal von MEINKE [14*] bei der Bandleitung eingeführt und nun auch auf Hohlrohr ausgedehnt wurde, gestattet überdies eine eindeutige Definition der Impedanz bzw. des Wellenwiderstandes der H_{10} -Welle nämlich als Quotient der elektrischen und der magnetischen Transversalkomponente. Das transformierte Hohlrohr hat nämlich überall den gleichen Querschnitt und es entfällt daher die Notwendigkeit einen integralen Wellenwiderstand zu definieren. Um nun die Wirkung von Änderungen in der Rohrhöhe oder -breite des wirklichen Rohrsystems zu beschreiben, war man bisher genötigt, einen Wellenwiderstand zu definieren. Es war dies auf eindeutige Weise nicht möglich. In dem hier eingeführten transformierten Rohrsystem erscheinen jedoch solche Querschnittsänderungen einfach als Änderungen des μ in einem gleichbleibenden Rohrquerschnitt und können daher eindeutig durch den Quotienten E/H , den Feldwiderstand bzw. Feldwellenwiderstand beschrieben werden.

Nachtrag bei der Korrektur. In der schon einmal (s. Schluß von [1]) erwähnten Arbeit von S. O. RICE werden zwei prinzipielle Lösungsmethoden der Hauptgleichungen (1) bzw. (33) diskutiert. Die eine stimmt mit der hier behandelten überein. Bei der anderen wird die Hauptgleichung unter Benutzung ihrer GREENschen Funktion als zweidimensionale Integralgleichung angeschrieben und durch sukzessive Approximation gelöst.

Literatur. [1] PILOTY, R.: Z. angew. Phys. 1, 441 (1949). — [2] KÜPFMÜLLER, K.: Theor. Elektrot., 3. Aufl. S. 123 ff. Berlin: Springer. — [3] SCHELKUNOFF, S. A.: Quart. Appl. Mth. 3, 348 (1946). — [4] GRAY, M. C., and S. A. SCHELKUNOFF: B. S. T. J. 27, 350 (1948).

Dr. ROBERT PILOTY, (13 b) Starnberg am See,
Possenhofenerstr. 49.

Messung niederfrequent veränderlicher Ströme und Spannungen mit Galvanometern.

Von C. MOERDER, Göttingen.

Mit 6 Textabbildungen.

(Eingegangen am 19. Februar 1949.)

1. Die Galvanometer für Änderungsmessungen.

Zwischen der Gruppe der Galvanometer, insbesondere der Spiegelgalvanometer für Brücken-, Isolations- und ähnliche Gleichstrommessungen und der Gruppe der Schleifenzosillographen für die Messung von sehr schnell veränderlichen Augenblickswerten steht die Gruppe der Galvanometer für mäßig schnell verlaufende Gleichstrom- und Gleichspannungsänderungen. Erstere haben (offene) Schwingungszeiten von etwa 1 bis 40 sec und zwar um so längere, je höhere Empfindlichkeiten erreicht werden müssen [1]. Die Zosillographen haben Eigenschwingzeiten bis herab zu $\frac{1}{1000}$ oder $\frac{1}{5000}$ sec, sind aber dafür entsprechend unempfindlich, so daß Verstärker für die Anzeige meist nicht entbehrt werden können. Die hier zu besprechende Gruppe von Galvanometern mit Schwingzeiten von einigen Zehntel bis $\frac{1}{200}$ sec findet außer in der Industrie vor allem Anwendung in der Physiologie [2] für die Messung von Körperströmen

und -spannungen, wobei wegen der Gefahr einer falschen Diagnose jede fehlerhafte Wiedergabe des Verlaufs besonders sorgfältig vermieden werden muß. Diese Galvanometer liegen in der Empfindlichkeit wieder höher, als die Zosillographen und haben den vor allem bei gleichzeitiger Anwendung mehrerer Instrumente erheblichen Vorteil, noch keiner Verstärkereinrichtungen zu bedürfen. Hierher gehört, z. B. das Torsionsfadengalvanometer von Kipp und Zonen, Delft in Holland, mit folgenden Daten: $T_0 = 0,01$ bis 0,05 sec; $C_i = 8 \cdot 10^{-7}$ bis $4 \cdot 10^{-8} \frac{\text{A}}{\text{mm/m}}$; $R_g = 5$ bis 10 Ω ; $R_{gr} = 6 \Omega$ bis ∞ . (Bedeutung der Zeichen s. unten.) Ferner das von REIN selbst entwickelte Drehbügelgalvanometer der Firma Ruhstrat, Göttingen mit den Daten: $T_0 = 0,017$ bis 0,05 sec; $C_i = 1,1 \cdot 10^{-6}$ bis $4 \cdot 10^{-7} \frac{\text{A}}{\text{mm/m}}$; $R_g = 700$ bis 34 Ω ; $R_{gr} = 1700$ bis 175 Ω . Aber auch schnell-schwingende

Galvanometer anderer Firmen z. B. von Siemens u. a. mit Schwingzeiten von $T_0 = 0,5$ sec können auch mit einbezogen werden.

2. Die Voraussetzungen für richtige Änderungsmessungen.

Theoretische Überlegungen [3] ergeben, daß ein veränderlicher Vorgang mit der größten Änderungsfrequenz f_m nur dann amplitudenrichtig auf 2 bis 3 % wiedergegeben wird, wenn die (ungedämpfte) Eigenfrequenz des anzeigenden Galvanometers $f_0 = 1/T_0$ mindestens das 2- (bis 6) fache von f_m beträgt, also die Eigenschwingungsdauer $T_0 \leq \frac{1}{2f_m}$ (bis $\frac{1}{6f_m}$) ist. Beim Vorhandensein von Oberwellen im Meßvorgang — und das ist die Regel — kommt als Bedingung für phasentreue Wiedergabe hinzu, daß die Dämpfung im Galvanometerkreis $b = 0,65$ bis 0,8 betragen muß, wenn $b = 1$ den Grenzzustand der Überdämpfung, also den Übergang von periodischem Schwingen zum aperiodischen Kriechen bezeichnet. Während bei Oszillographenschleifen wegen der kleinen Windungszahl der Schleife die äußere elektrische Dämpfung vernachlässigbar zu sein pflegt und die vorgeschriebene Dämpfung durch ein besonderes Öl im Schleifengehäuse gewährleistet wird, muß dieselbe bei Galvanometern durch entsprechende Dimensionierung des elektrischen Meßkreises und Wahl des Galvanometers erreicht werden. Wird der Dämpfungsgrad b üblicher und gewohnheitsmäßiger Art die Grenzdämpfung $b = 1$ eingestellt, so entstehen Amplitudenfehler bis über 20% und Phasenfehler bis über 10° (bezogen auf eine Eigenfrequenzperiode $= 360^\circ$, als entsprechende „Nacheilstrecke“ erscheinend), bei Ausnutzung des Galvanometers bis zum 0,5 fachen seiner Eigenfrequenz f_0 , während bei richtiger Dimensionierung der Schaltung nur 1% bzw. 3 bis 5% möglich sind. Beim Galvanometer wird der Dämpfungsgrad b durch das Verhältnis aus dem „Grenzwiderstand R_{gr} (listenmäßig angegebener Widerstand des gesamten Galvanometerkreises für Grenzdämpfung) zum gegebenen Galvanometerkreiswiderstand R_{kr} bestimmt:

$$b = \frac{R_{gr}}{R_{kr}} \quad (1)$$

Der leicht periodische Zustand $b = 0,7$ ergibt sich also, wenn der Kreiswiderstand $R_{kr} = R_M + R_g$, der sich aus dem Geberwiderstand der Meßanordnung R_M (von dem Galvanometerklemmen aus gemessen) und dem Galvanometereingangswiderstand R_g zusammensetzt, etwa 1,4mal größer gewählt wird, als R_{gr} . Die genaueren Einstellregeln für die Dämpfung werden im folgenden unter 4. behandelt. Zunächst sollen die Zusammenhänge zwischen Schwingungszeit und Dämpfung, Amplituden- und Phasenfehler an Hand der Kurven Abb. 1 näher veranschaulicht werden. Die Angabe: Amplitudenfehler max -2 bis -3% bei $f_m = \frac{1}{2f_0}$ entspricht dem amplituden- und phasentreuen Optimalfall bei $b = 0,7$ mit max 4 bis 5° Phasenunterschied (Nacheilung), gerechnet zwischen einer Oberwelle mit einer Frequenz $f_m = 0,5 f_0$ und

einer sehr niederfrequenten Grundwelle $f \rightarrow 0$. Amplitudenmäßig allein kann man mit $b = 0,65$ bis $f_m = 0,6 f_0$ auf nur 1% Fehler kommen, wenn man phasenmäßig 10° Nacheilung für f_m in Kauf nimmt. Umgekehrt kann man den Phasenfehler auf 3° drücken durch Wahl einer Dämpfung $b = 0,75$, wenn man bis $f_m = 0,5 f_0$ einen Amplitudengang von -5% zuläßt. Der kleine Phasenfehler bleibt bei $b = 0,75$ sogar bis zu $f_m = f_0$ bestehen, der Amplitudenfehler wächst

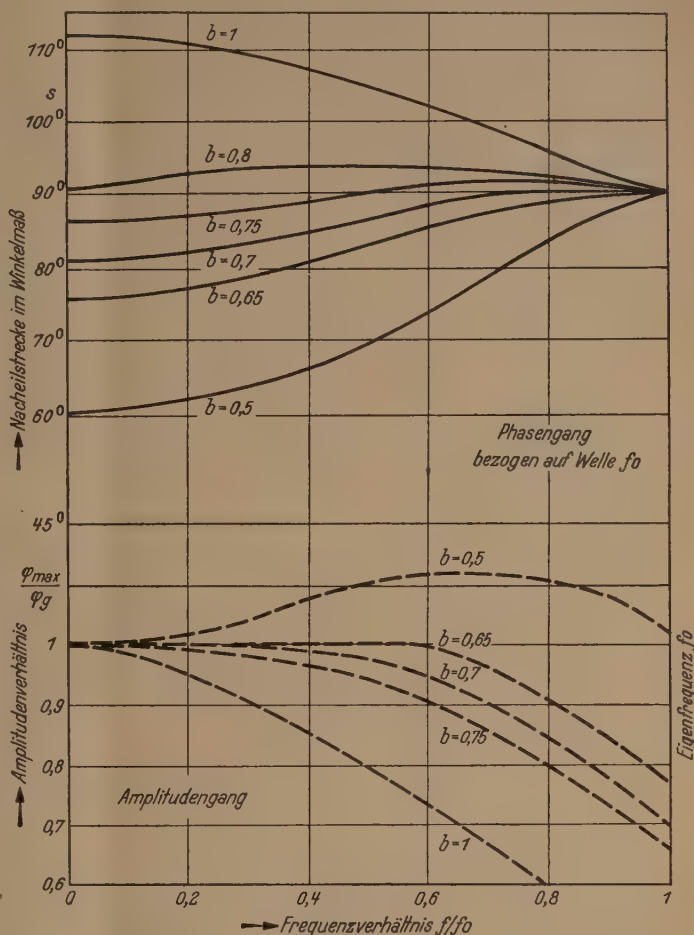


Abb. 1. Amplituden- und Phasengang der Wiedergabe einer niederfrequenten Kurve mittels Galvanometer oder Oszillograph abhängig vom Frequenzverhältnis Meßfrequenz f_m zu Eigenfrequenz f_0 . Als Ordinate ist aufgetragen das Amplitudenverhältnis zu dem bei Gleichstrom sich ergebenden Wert bzw. die Nacheilstrecke s gemessen im Winkelmaß, wobei 360° einer Eigenschwingungsperiode entsprechen.

dann aber auf -33% bei $f_m = f_0$. Bei anderen Dämpfungen b bis $b = 1$ und $b = 0,5$ kann man nur die Amplitudenfehler bei 2 bis 3% und die Phasenfehler bei einigen Grad halten, wenn man die Eigenfrequenz f_0 des Galvanometers mindestens 6mal so groß hält, als die größte Änderungsfrequenz f_m . Dies bedeutet aber Empfindlichkeitsverlust. Weitere Angaben und Kurven findet man in der Literatur [3], [4], [5].

Diese Ableitungen gelten sowohl für photographische Registrierung, als auch für visuelle Betrachtung periodisch wiederholter oder durch Fourierwellen darstellbarer Einschaltvorgänge. Sie sind in vollem Umfange auch für Oszillographen zutreffend.

Ein rechteckiger Einschaltstoß enthält bekanntlich Fourierfrequenzen f_m bis „Unendlich“, kann also immer nur „abgeschliffen“, d. h. unter ganzer

oder teilweiser Unterdrückung der hohen Teilwellen, wiedergegeben werden. Die genaue Definition für die größte Änderungsfrequenz f_m lautet: Sie ist immer diejenige größte Fourierfrequenz, bei der man die den Vorgang wiedergebende Fourierreihe ohne großen Fehler abbrechen darf. Sie läßt sich meist abschätzen an der Steilheit, der Periode oder dem Abstand der Nulldurchgänge der in der „Restkurve“ erkennbaren Oberwellen. Unter Restkurve ist die verbleibende Kurve zu verstehen, wenn man die Grundwelle fort-denkt oder in der beim Klirrfaktormesser üblichen Art eliminiert [6], [7]. In schwierigeren Fällen bleibt

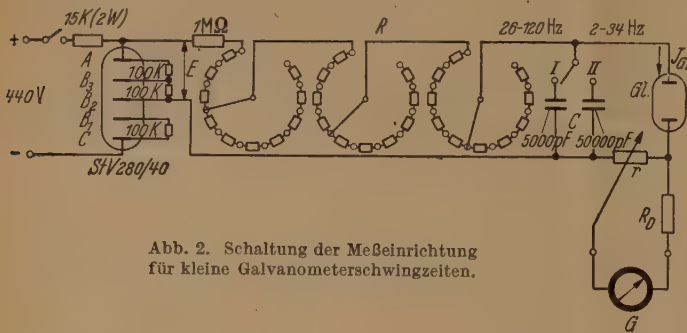


Abb. 2. Schaltung der Meßeinrichtung für kleine Galvanometerschwingzeiten.

nur die experimentelle oder rechnerische Analyse der zu messenden Kurve, wie sie in der Literatur wiederholt beschrieben ist [8]. In der Physiologie sind die höchsten vorkommenden oder zu berücksichtigenden Frequenzen im allgemeinen aus Erfahrung bekannt. Bei kardiographischen Messungen stellt man sehr

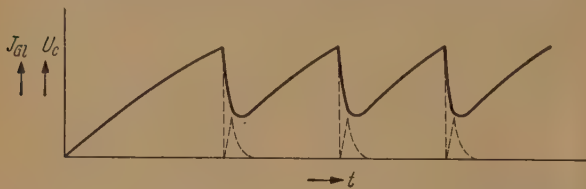


Abb. 3. Verlauf der Kondensatorspannung und des Entladestoßes einer Blinkschaltung.

große Anforderungen vor allem an die Phasenrichtigkeit der Wiedergabe und an die Höhe der Änderungsfrequenz, weswegen man zu diesen Messungen des Saiten- oder Schleifenoszillographen mit Verstärker nicht entraten kann.

3. Die Schwingungszeitmessung beim schnellschwingenden Galvanometer. Eine neue Meßeinrichtung hierfür.

Es ist nach vorigem wesentlich, die Eigenschwingungsdauer des Galvanometers zu kennen, um die höchste noch erfaßbare Änderungsfrequenz bestimmen zu können. Die Schwingungszeitmessung mittels Stoppuhr scheidet wegen der Kleinheit von T_0 hier aus, die photographische Ermittlung mittels „Kymographion“ [9] oder anderem ist namentlich in der Fertigung zu zeitraubend und materialverbrauchend. Der Verfasser ermittelte daher die offene Schwingungsdauer durch Resonanzregung des betreffenden Galvanometers mittels eines geeichten Schwebungs- oder RC-Summers, wobei vor das Galvanometer ein so großer Widerstand geschaltet wurde, daß es nahezu ungedämpft schwingt. Da die gedämpfte Schwingungsdauer

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1-b^2}} \quad (2)$$

bei sehr kleinem b also praktisch $T = T_0 = 1/f_0$ ist erhält man so T_0 mit völlig ausreichender Genauigkeit. Ebenso, wie beim Vibrationsgalvanometer ergibt sich statt der Lichtmarke auf dem Schirm ein breiter Lichtband, das bei Resonanz ($f_{\text{Summer}} = f_0$) die größte Ausdehnung nach links und rechts erreicht. Wegen der geringen Dämpfung ist die Resonanz sehr scharf, die Messung außerordentlich genau.

Praktisch ergab sich aber die Schwierigkeit, daß die Summer meist nicht unter 20 bis 25 Hz tiefst einstellbare Frequenz reichten oder ein dafür anzuschaffender Tieftonsummer viel zu kostspielig gewesen wäre. Da die Resonanzregung des Galvanometers durchaus nicht sinusförmig erfolgen muß, gab der Verfasser folgenden auf dem Prinzip der „Blinkschaltung“ beruhenden Apparat zur Messung von Galvanometerschwingzeiten zwischen 1 und 150 Hz an, der sehr einfach zu bauen ist:

Die Schaltung ist durch Abb. 2 wiedergegeben. Bei der Blinkschaltung lädt sich bekanntlich der Kondensator C unter dem Einfluß einer angelegten Gleichspannung E über einen Hochohmwidstand R so lange auf, bis eine zu C parallel liegende Glühlampe G zündet und C bis zu ihrer Löschspannung entlädt. Es folgt nun wieder Aufladung bis zum Zünden, hierauf wieder Entladung usw. in rhythmischer Spiel (Abb. 3). Die Zeitkonstante der Aufladung ist gegeben durch das Produkt $C \cdot R$. Durch Umschaltung von C oder R läßt sich in eichbarer Weise die Frequenz der Entladestöße einstellen. Bedingung für die Eichbarkeit ist eine absolut konstante Spannung E . Diese wird erreicht durch Anordnung eines Stabilisators StV zwischen Gleichstromnetz und Blinkschaltungseingang oder durch Verwendung einer Batterie. Mit der Glühlampe Gl in Reihe liegt ein gegen R kleiner Widerstand r , von dem ein für das Galvanometer G völlig ausreichender Spannungstoß in seiner Größe regelbar abgegriffen werden kann. Vor dem Galvanometer selbst liegt wieder ein sehr großer Widerstand R_D , um die Galvanometerdämpfung vernachlässigbar klein zu halten. Die gewählten Werte sind: $R = 0,01$ bis $10 \text{ M}\Omega$ in Stufen von $\text{M}\Omega$, $100 \text{ k}\Omega$ und $10 \text{ k}\Omega$ (Massewiderstand), $C = 50000 \text{ pF}$ (für Bereich 2 bis 34 Hz) bzw. $C = 5000 \text{ pF}$ (für Bereich 28 bis 120 Hz), $r = 4 \text{ k}\Omega$, $R_D = 100 \text{ k}\Omega$ Stabilisator $StV 280/40$ (auch kleiner möglich). Entsprechender Vorwiderstand $15 \text{ k}\Omega$ und Zündwiderstände $100 \text{ k}\Omega$, Glühmstrecke $Gl = StV 100/25$ vor Stabilovolt. $E = 140 \text{ V}$, Netz 220 oder 440 V. Die Schaltung vom Stabilisator bis zu C und Gl und die Stufenschalter müssen wegen der Hochohmigkeit sorgfältig isoliert sein, damit durch Feuchtigkeitseinflüsse, Kriechströme und dergleichen keine Änderungen der Eichkurve eintreten. Die Eichung selbst (Abb. 4) wurde mit Hilfe eines Elektronenstrahl-oszillographen und geeichten Summers für höhere Frequenzen vorgenommen, da alle andersartigen oder direkten Messungen an der Kleinheit der verfügbaren Energie des Blinkstoßes scheiterten. Auf die Platten für waagrechte Ablenkung wurde die sinusförmige Summerspannung gegeben. Der Entladestoß der Blinkschaltung wurde über Verstärker an die senkrechte Ablenkung des Oszillographen angelegt. Wie aus Abb. 5 erkenntlich ist, ergibt sich auf dem Oszillo-

graphenschirm ein stehendes Bild des Stoßes immer, wenn die Summerfrequenz ein ganzzahliges Vielfaches der Entladefrequenz ist. Bis zum 15fachen der

auch mit dem unter 3. beschriebenen Apparat bestimmt werden. Es ist lediglich nötig den Widerstand R (Abb. 2) noch etwas feiner zu unterteilen.

Tabelle 1.

Dämpfungsgrad b in % von a_1 . .	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,075	0,1	0,2	0,3
	100	97	94	91	88	85,5	79	73	52	37
Dämpfungsgrad b in % von a_1 . .	0,4	0,5	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8	0,9	1	
	25	16,5	9,5	7	4,5	3	1,6	0,15	0	

Entladefrequenz konnte die Summerfrequenz noch gut gewählt werden. Bei langsamer Steigerung der Summerfrequenz tritt ein stehendes Bild bei jeder um die gesuchte Entladefrequenz höheren Frequenz ein, was mehrfache Kontrolle und große Genauigkeit der Messung ermöglicht. Dazwischen auftretende stehende Bilder mit mehreren Spitzen bleiben unberücksichtigt. Die Einrichtung hat sich praktisch gut bewährt. Sie war in einem Kasten $350 \times 250 \times 95$ mm mit entsprechenden Durchblicköffnungen in der Frontplatte eingebaut.

4. Die Nachprüfung und Einstellung der Galvanometerdämpfung.

Ist der Grenzwiderstand R_{gr} und Eigenwiderstand R_g für das Galvanometer genau angegeben, so kann man aus der oben angegebenen Beziehung den von den Anschlußklemmen aus zu rechnenden Widerstand R_M der Meßschaltung für die vorgeschriebene Dämpfung (z. B. $b=0,7$) rechnerisch leicht bestimmen:

$$R_M = \frac{R_{gr}}{b(-b_0)} - R_g. \quad (3)$$

Hinsichtlich b_0 siehe unten.) Kann man dem Meßwiderstand R_M nicht die berechnete Größe geben und ist dies auch nicht durch Feldregelung oder durch Wahl eines anderen Galvanometers zu erreichen, so müssen zusätzliche Dämpfungswiderstände angeordnet werden. Ist R_M zu klein, so ist Vorwiderstand im Betrage der Differenz vorzusehen. Ist R_M zu groß, so ist er durch einen Nebenwiderstand $R_p = \frac{R_{M \text{ Soll}} R_M}{R_M - R_{M \text{ Soll}}}$ auf den berechneten Wert $R_{M \text{ Soll}}$ herabzusetzen. Der durch beide Maßnahmen hervorgerufene Empfindlichkeitsverlust für die Galvanometeranzeige pflegt trivial zu sein (siehe 5.).

Ist Feldregelung möglich (z. B. beim Torsionsadengalvanometer mit Elektromagnet; magnetische Nebenschlüsse pflegen bei schnellschwingenden Galvanometern nicht vorhanden zu sein), so läßt sich das gewünschte b ohne Zusatzwiderstände bei sehr verschieden groß gegebenem R_M einstellen.

Man erkennt das richtige $b = 0,7$, wenn man das Galvanometer bei angeschlossenem R_M durch einen Strom- oder auch mechanischen Stoß zum Ausschlag bringt und das Amplitudenverhältnis zweier aufeinander folgender Halbschwingungen $a_2:a_1$ auf 4,5:100 bringt. Auch alle anderen Dämpfungsgrade lassen sich durch derartige Abklingmessungen feststellen. In Hand der oben gebrachten, aus $\ln \frac{a_1}{a_2} = \frac{2\pi b}{\sqrt{1-b^2}}$ berechneten Tabelle.

Die offene Dämpfung b_0 , das ist die Galvanometerdämpfung bei offenem Galvanometerkreis, welche man manchmal berücksichtigen muß, kann außer durch die Messung der abklingenden Amplituden

Der Maximalausschlag a_{\max} des Galvanometers bei Resonanzanregung ist umgekehrt proportional zu b .

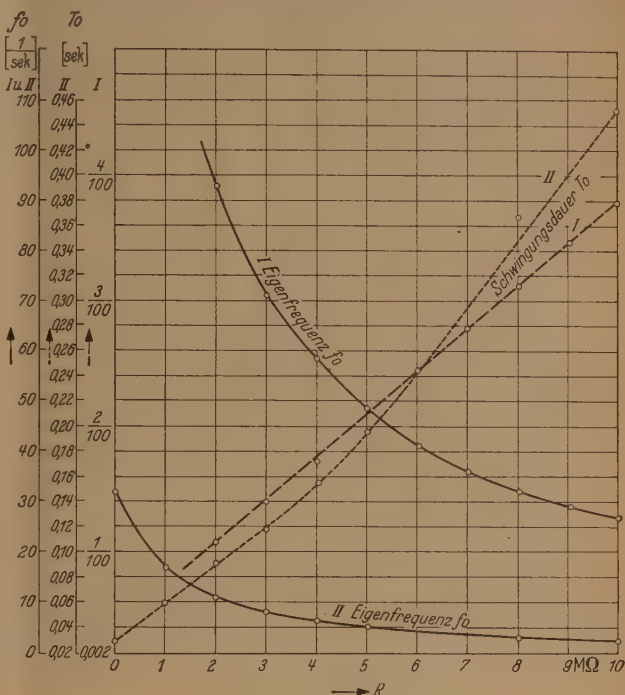


Abb. 4. Eichkurven zu Einrichtung Abb. 3.

Zur Auswertung müßte aber immer die an r abgegriffene Spannung bekannt sein. Besser ist daher die Bestimmung aus der „Halbwertsbreite“. Sind f_1 und f_2 die Frequenzen, bei denen der Resonanzausschlag bei gleicher Spannung auf die Hälfte des maximalen zurückgegangen ist, so gilt für sehr kleine b , in unserem Falle für das sehr kleine b_{off} :

$$b_{\text{off}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{f_2 - f_1}{f_2 + f_1}. \quad (4)$$

Ob die restliche elektrische Dämpfung bei $R_D = 100 \text{ k}\Omega$ noch Einfluß hat, kann durch eine 2. Messung mit $R_D = 200 \text{ k}\Omega$ leicht abgeschätzt werden.

5. Die Galvanometerempfindlichkeiten.

Die listenmäßigen Galvanometerempfindlichkeiten („Eichempfindlichkeiten“) beziehen sich stets auf den Grenzzustand der Dämpfung $b = 1$. Die so vom Verfasser benannten „Betriebsempfindlichkeiten“ [10]

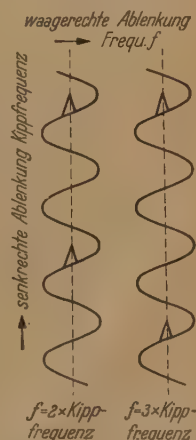


Abb. 5. Stroboskopische Eichung der Einrichtung Abb. 2 mit Überfrequenz.

bei anderen Dämpfungsgraden und künstlicher Dämpfungsanpassung durch Zusatzwiderstände weichen von den Eichempfindlichkeiten ab und können nicht listenmäßig erfaßt werden. Die betriebliche Stromempfindlichkeit S_i^* kann jedoch angenähert immer der Eichempfindlichkeit S_i gleichgesetzt werden. Ihr Reziprokwert, die Stromkonstante C_i wird zweckmäßig in $\frac{A}{mm/m}$ gemessen, das ist jene Stromstärke, die 1 mm Ausschlag in 1 m Skalenentfernung ergibt. Bezeichnet man mit $R_{agr} = R_{gr} - R_g$ den äußeren

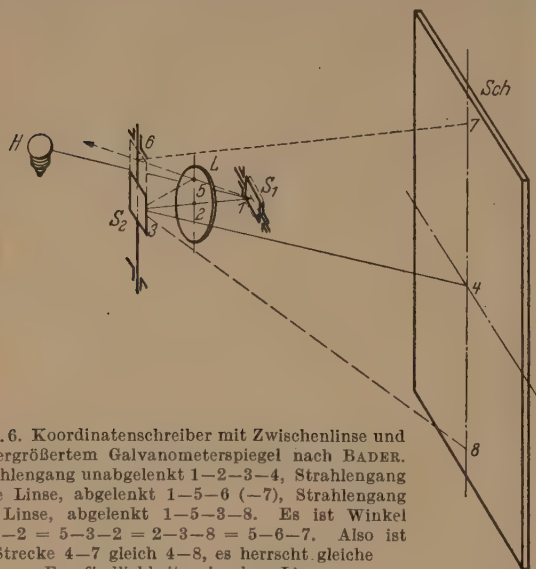


Abb. 6. Koordinatenschreiber mit Zwischenlinse und unvergrößertem Galvanometerspiegel nach BADER. Strahlengang unabgelenkt 1-2-3-4, Strahlengang ohne Linse, abgelenkt 1-5-6 (-7), Strahlengang mit Linse, abgelenkt 1-5-3-8. Es ist Winkel $5-1-2 = 5-3-2 = 2-3-8 = 5-6-7$. Also ist Strecke 4-7 gleich 4-8, es herrscht gleiche Empfindlichkeit, wie ohne Linse.

Grenzwiderstand, so berechnet sich die betriebliche Spannungsempfindlichkeit S_u^* aus der Eichspannungsempfindlichkeit S_u bei Grenzdämpfung zu:

$$S_u^* = S_u \frac{R_{agr}}{R_M} \quad (5)$$

Sie ist also bei $b = 0,7$ etwa 30% kleiner, als die listenmäßige Eichempfindlichkeit, was zu beachten ist. Der Reziprokwert von S_u , die Spannungskonstante C_u wird zweckmäßig in $\frac{V}{mm/m}$ angegeben, das ist diejenige Spannung, die 1 mm Ausschlag bei 1 m Skalenentfernung hervorruft.

6. Gleichzeitige Messung mehrerer Vorgänge.

Für die gleichzeitige Messung des zeitlichen Verlaufs mehrerer Vorgänge können wegen des durch den Mantel des Topfmagneten vollkommen abgeschirmten Systems beim REINSchen Galvanometer

ohne weiteres mehrere Instrumente nebeneinander angeordnet werden. Soll nicht der zeitliche Verlauf sondern die gegenseitige Zuordnung zweier Meßgrößen gemessen werden, so sind 2 Galvanometer als Koordinatenschreiber zu kombinieren, was bei Verwendung der von BADER [11] angegebenen Zwischenlinse ohne Spiegelverlängerung im nachgeordneten Galvanometer möglich ist. Abb. 6 gibt schematisch den Strahlengang in der BADERSchen Anordnung. Bei Linsenanordnung in der Mitte ist deren Brennweite gleich $\frac{1}{4}$ des Abstandes der beiden Galvanometerspiegel zu wählen.

Zusammenfassung.

Die Messung veränderlicher elektrischer Vorgänge mit Galvanometer bei mäßig großen Änderungsfrequenzen führt zur Einsparung des Verstärkers, da die schnellschwingenden Galvanometer empfindlicher sind, als Oszillographenschleifen. Jedoch werden größere Anforderungen meßtechnischer Art an die Messenden gestellt. Es muß nicht nur wie beim Oszillographen das Verhältnis von Meß- zu Eigenfrequenz beachtet werden, sondern auch die durch die Schaltung maßgebend beeinflusste Dämpfung, die beim Oszillographen schaltungsunabhängig durch dessen Öldämpfung gegeben ist. Andernfalls entstehen die hier genannten erheblichen Meßfehler. Die Mittel und Wege zur Dämpfungseinstellung und -messung und ein neuer Schwingungszeitmesser für Galvanometer werden angegeben. Die Vorausrechnung der sog. „Betrieblichen Spannungsempfindlichkeit“ bei $b \neq 1$ oder künstlicher Dämpfungsanpassung und ein Hinweis auf eine günstige Koordinatenschreiberanordnung beschließen den Aufsatz.

Literatur. [1] MEYER, E., u. C. MOERDER: Die Galvanometer für Gleich- und Wechselstrom, § 11. Offenburg: Burda 1949. — [2] REIN, H.: Pflügers Arch. **243**, 329, 557 (1940). — [3] MEYER, E., u. C. MOERDER: Die Galvanometer für Gleich- und Wechselstrom, § 9/6. Offenburg: Burda 1949. — [4] FREISE, H.: Arch. techn. Messen J 031—14 (Kurven auf mech. Aufzeichnungen bezogen!). — [5] GÖRNER, J.: Arch. techn. Messen J 082—3 (analoge Kurven bei Differentiation einer elektrischen Spannung). — [6] MOERDER, C.: Wiss. Abh. phys.-techn. Reichsanst. **24**, 1 (1940). — ETZ **61**, 77 (1940). — [7] HAMMERER, O.: ETZ **48**, 1321 (1927); **49**, 501 (1928). — [8] EISNER, F.: Arch. techn. Messen V 3620—4 u. 6. — POLECK, H.: VDE-Fachber. **10**, 95 (1938). — GRÜTZMACHER, M.: Elektr. Nachr.-Techn. **4**, 533 (1927). — [9] Fa. F. Hellige u. Co., Freiburg i. Breisgau. — [10] MEYER, E., u. C. MOERDER: Die Galvanometer für Gleich- und Wechselstrom, § 14. Offenburg: Burda 1949. — [11] BADER, W.: Arch. Elektrotechn. **1937**, 108.

Dr. Ing. habil. C. MOERDER, (20 b) Göttingen, Lange Geismar-Straße 68—74, in Firma Ruhstrat.

Neue Anwendungen für Halbleiter-Widerstände*.

Von HARALD STRAUBEL, Jena.

Mit 2 Textabbildungen.

(Eingegangen am 27. April 1949.)

1. Einleitung.

Seit längerer Zeit werden in elektrischen Apparaten, besonders in Radiogeräten, Halbleiterwiderstände mit hohem negativem Temperaturkoeffizienten

* Die Arbeit ist im Jahre 1944 bei der Zeitschrift für Technische Physik eingereicht worden, ist aber dort nicht mehr erschienen.

verwendet („Urdox“-Widerstände) [1]. Der große Temperaturkoeffizient (T.K.) dient zu allerlei Anlaßzwecken, z. B. zur Kompensation des Einschaltstoßes bei Eisen-Wasserstoff-Widerständen, zur Relaisverzögerung usw. Größere Widerstände werden zum unmittelbaren Anlassen von Motoren verwendet. Auch die vorzügliche Eignung dieser Widerstände

zu Meßzwecken (Bolometer, Vakuummeter) sei hier erwähnt [2]. Die Verwendung zur Steuerung von Lichtquellen wurde schon früher vom Verfasser beschrieben [3]. Im folgenden werden zwei neue Anwendungsmöglichkeiten dieser Widerstände behandelt, bei denen ihre hohe Steuerleistung Verwendung findet.

2. Elektrischer Tankinhaltsanzeiger.

Die bisher üblichen Geräte zur elektrischen Ermittlung des Inhaltes von Flüssigkeitsbehältern, insbesondere bei Kraftfahrzeugen, bestehen meist aus einem Schwimmer, der einen Widerstand stellt. Der durch den Widerstand fließende Strom gibt dann in einem geeignet geeichten Anzeigeinstrument (mA-Meter) den jeweiligen Flüssigkeitsstand an. Die mechanische Empfindlichkeit der Schwimmer-Widerstands-Anordnung kann man dadurch vermeiden, daß ein elektrisch vorgeheizter (Brücken-) Widerstandsdraht unmittelbar in die Flüssigkeit eintaucht. Durch den verschiedenen hohen Flüssigkeitsstand wird der Widerstand auf eine mehr oder weniger große Länge abgekühlt und ändert sich vermöge des allen metallischen Leitern anhaftenden T.K. Diese Änderungen sind zwar klein, können aber an genügend empfindlichen elektrischen Meßinstrumenten abgelesen werden. Endlich ist es auch bekannt, mittels eines im Tank befindlichen Schwimmers eine Anzahl von Kontakten zu betätigen, die z. B. eine Reihe entsprechender Glühlampen aufleuchten lassen.

Alle genannten Verfahren — die pneumatischen Meßeinrichtungen seien hier nicht behandelt — haben den Nachteil, daß sie in irgendeiner Form mit mechanischen und dementsprechend (bei Fahrzeugen) gegen Erschütterungen empfindlichen Instrumenten arbeiten müssen. Der Schwimmerwiderstand wird bei nicht sehr vollem Tank starke Bewegungen ausführen, die sich auf die Anzeige übertragen. Allerdings erlaubt die Verwendung relativ unempfindlicher elektrischer Meßinstrumente, da er verhältnismäßig starke Ströme steuern kann. Für die Anzeige über den vorgeheizten Brückenwiderstand hingegen ist schon ein empfindliches Meßinstrument erforderlich, dessen Spitzenlagerung gegen Erschütterungen sorgfältig geschützt werden muß. Beide Vorrichtungen benötigen bei nicht ausreichend konstanter Betriebsspannung besondere Kompensationsverfahren. (Kreuzspul-Instrumente, Eisen- Wasserstoff-Widerstände).

Schließlich ermöglichen die erwähnten Verfahren nicht eine ganz genaue Anzeige darüber, wann wirklich die Tankreserve in Anspruch genommen wird, da bereits geringe Nullpunktverschiebungen der Instrumente oder der Schwimmermechanik die Angaben in unkontrollierbarer Weise fälschen. Die Tatsache, daß der Kraftstoff schon zu Ende ist, während das Meßgerät noch etwas anzeigt, ist jedem Kraftfahrer genügend bekannt.

Der Verfasser konstruierte mit den in der Einleitung erwähnten Halbleiterwiderständen („Urdox“-Widerstände) einen neuen Tankinhaltsanzeiger, der die oben genannten Nachteile vermeidet und keinerlei bewegliche Teile enthält. Es wird im allgemeinen genügen, den Tankinhalt in bestimmten Stufen, dann aber recht genau zu kennen. In den zu messenden

Tank werden nun dementsprechend mehrere Halbleiterwiderstände mit hohem negativem T.K. eingehängt und einzeln mit je einer Glühlampe hintereinander an die Netzspannung gelegt (Abb. 1). Widerstand und zugehörige Glühlampe sind so aufeinander abgestimmt, daß bei kaltem, d. h. vom Kraftstoff umspülten Widerstand die Lampe *nicht* aufleuchtet. Sinkt der Flüssigkeitsspiegel und gibt damit einen Widerstand frei, so kann dieser sich erwärmen (auf etwa 80 bis 100°C) und läßt nun infolge des starken negativen T.K. einen so großen Strom fließen, daß die Lampe *aufleuchtet*. Wird der Tank wieder gefüllt, so *erlöscht* die Lampe.

Zweckmäßig wird man in einem Tank eine Reihe von Widerständen übereinander anordnen und mit den entsprechend markierten Lampen verbinden. Bei einem (Auto-) Tank für etwa 50 Liter wird es beispielsweise genügen, Widerstände bzw. Lampen in folgenden Stellungen anzubringen: 50, 35, 20, 5 und

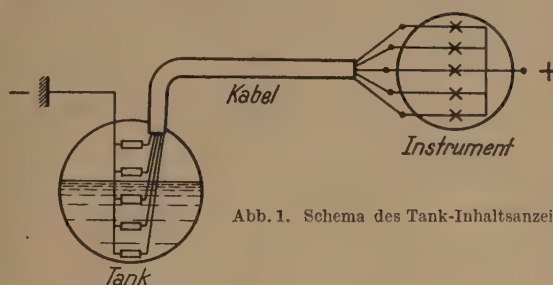


Abb. 1. Schema des Tank-Inhaltsanzeigers.

2 Liter. Wird der Tankinhalt verbraucht, so leuchten nacheinander die entsprechenden Lampen auf. Wenn alle Lampen brennen, bedeutet dies, daß der Tank leer ist.

Widerstände und Lampen können auch in einer Brückenschaltung so betrieben werden, daß die Lampen bei vollem Tank *brennen*, beim Leerlaufen hingegen erlöschen.

Das in den Tank eintauchende System (Geber) besteht lediglich aus einer Anzahl von Haltestäben (hier 6), zwischen denen die einzelnen Widerstände in geeigneter Höhenlage befestigt sind. Die Stäbe dienen gleichzeitig als Stromzuführungen und tragen an ihrem oberen Ende je eine Anschlußklemme. Zum Schutze gegen Beschädigungen ist das Gebersystem in einem Rohr untergebracht. Dieses Rohr hat an seinem unteren Ende nur eine kleine Durchtrittsöffnung für den Kraftstoff, am oberen Ende ein entsprechendes Luftloch. Die Öffnungen sind so klein gehalten, daß auch bei starkem Pendeln des Tanks keine Anzeigeschwankungen auftreten. Das Gehäuse (Rohr) dient gleichzeitig als Davyscher Sicherheitskäfig für den Fall einer elektrischen Unterbrechung an den Widerständen.

Das Anzeigeinstrument enthält nur eine Anzahl von Glühlampen, die mit den entsprechenden Widerständen verbunden sind und die jeweils gültige Literzahl unmittelbar erleuchten. Widerstände und Lampen sind so ausgewählt, daß z. B. die 6V-Lampen (0,6 W) nur mit 3,5 bis 4 V brennen. Dadurch ergibt sich bei völlig ausreichender Helligkeit eine praktisch unbegrenzte Lebensdauer. Bei Anschluß an 6 V trägt der Verbrauch je Lampe etwa 50 mA, d. h. wenn bei gänzlich leerem Tank z. B. die oben erwähnten 5 Lampen brennen, etwa 0,25 A.

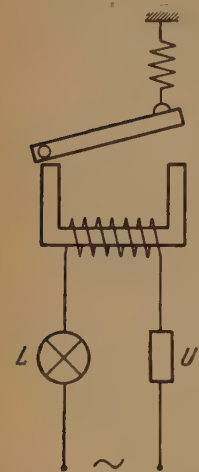
Infolge Wärmeträgheit der Widerstände folgt die Anzeige nicht augenblicklich dem Flüssigkeitsstand, sondern es vergehen etwa 10 bis 15 sec bis zum Aufleuchten der betreffenden Lampe. Dies stört aber bei normalem Fahrbetrieb in keiner Weise, weil ja der Kraftstoffspiegel vergleichsweise nur außerordentlich langsam absinkt. Das Erlöschen der Lampen bei Füllung des Tanks hingegen erfolgt nur mit einer Verzögerung von weniger als 1 sec, so daß man beim Tanken durch Beobachten des Gerätes sofort erfährt, wenn der Tank etwa voll ist.

Um den Eigenverbrauch des Gerätes und die Aufheizzeit klein zu halten, werden Halbleiterwiderstände von geringsten Abmessungen verwendet. Die in der beschriebenen Anordnung benutzten Widerstände waren Stäbchen von etwa 3,5 mm Länge bei etwa

0,6 mm Durchmesser. Wählt man größere Querschnitte, so wächst damit die abgebbare „Steuerleistung“ entsprechend. Man kann z. B. den im Tank tiefsten Widerstand für größere Ströme bemessen und dann außer der einen Lampe auch noch ein Ventil oder eine elektrische Membranpumpe unmittelbar betätigen lassen, so daß der Tank aus irgendeiner Reserve wieder nachgefüllt wird, oder daß sich die Reserve selbsttätig zuschaltet.

Da die normalen Kraftstoffe ausreichend isolieren, tauchen bei dem vorstehend beschriebenen Gerät die Widerstände nebst Zuleitungen unmittelbar in die Flüssigkeit ein. Zur Inhaltsmessung bei leitenden Flüssigkeiten nimmt man zweckmäßig rohrförmige Halbleiterwiderstände, deren Außenfläche

Abb. 2. Schaltbild zur Erzeugung periodischer Stromänderungen.
 U = Urdox-Widerstand;
 L = Nutzwiderstand, z. B. Lampe.



und eine Grundfläche ganz mit Metall überzogen ist und als die eine Elektrode dient. Mit dieser Elektrode ist der Widerstand in eine Bohrung der Tankwandung eingelötet, ragt also wie ein Fingerhut in die Flüssigkeit hinein. Der von der Flüssigkeit nicht umspülte Innenzylinder stellt die — nach der Luftseite zu offene — zweite Elektrode dar. Der Strom durchdringt dabei den Widerstand in radialer Richtung.

Widerstände dieser Form lassen sich auch gut in Rohrleitungen einbauen, beispielsweise um zu prüfen, ob Kühlmittel durchfließen (Lagerkühlung). Bei Unterbrechung des Kühlmittelflusses erwärmt sich der Widerstand sofort und kann die gefährdete Maschine stillsetzen.

Der neue Tankinhaltsmesser ermöglicht eine einwandfreie, absolut betriebssichere Anzeige. Der Fortfall jeglicher Kontakte oder bewegter Teile, sowohl beim Geber als auch beim Empfänger, ergibt eine größtmögliche Einfachheit und Sicherheit. Abnutzungen können nicht auftreten. Die Anordnung arbeitet auch bei allen vorkommenden üblichen Spannungsschwankungen stets gleich zuverlässig, ohne daß irgendwelche Kompensationseinrichtungen erforderlich sind. Eine in den einzelnen Stufen millimetergenaue Anzeige ist stets gewährleistet¹.

¹ Hersteller: Andreas Veigel, Bad Cannstatt.

3. Erzeugung langsam-periodischer Stromänderungen.

Für viele Zwecke ist es erwünscht, einen elektrischen Strom in seiner Stärke periodisch langsam zu verändern. Dies ist beispielsweise zur Erzeugung von Blinklicht, zur Aussendung von Signalen, erforderlich. Dazu wird entweder ein an sich konstanter Strom durch variable Widerstände, die von einer Mechanik aus angetrieben werden, verändert. Oder die Frequenzerzeugung wird mittels Stromtoren (Thyratron) vorgenommen. Es sind auch Schaltungen bekannt, bei denen elektrische Schwingungskreise mit dem speisenden Wechselstrom periodisch in Resonanz gebracht werden. Als Mittel, die Schwebungen hervorzurufen, dient dabei entweder eine Drossel mit beweglichem Eisenkern, der durch seine Pendelungen entsprechende Änderungen der Selbstinduktion und damit der Resonanzfrequenz hervorruft². Man hat auch dem Resonanzkreis mit eingeschlossener Drossel einen Widerstand mit positivem oder negativem T.K. vorgeschaltet³. Die Widerstandsänderungen bewirken dann eine Magnetisierungsänderung des Eisenkernes der Drossel und damit — infolge der Magnetisierungskennlinie — eine entsprechende Verstärkung des Schwingungskreises, die sich gegenseitig zu höheren Amplituden aufschaukeln.

Derartige Einrichtungen besitzen aber nur ein geringes Kippmoment, das die Schwingungen erzwingt. Beim Zusammentreffen ungünstiger Umstände (größere Reibung des Eisenkernes, Schwankungen der Netzspannung) kann sich ein Gleichgewichtszustand einstellen (Wärmetod).

Um dies zu vermeiden, hat man schließlich eisen geschlossene Selbstinduktionen über Geräte mit nichtlinearer Charakteristik (Gleichrichter) und zur Verstärkung der Wirkung in Kaskadenanordnung arbeiten lassen⁴. Alle derartigen Geräte, die nach dem Resonanzprinzip arbeiten, können nur mit Wechselstrom betrieben werden und hängen in ihrer Funktion von der Frequenz (und Spannung) des Speise-Wechselstromes ab. Sie haben einen verhältnismäßig komplizierten Aufbau und bedürfen zum Betrieb teilweise eines Anstoßes (elektrisch oder mechanisch), weshalb sie beim Vorliegen selbst geringfügiger mechanischer Hemmungen (Beschleunigungskräfte!) außer Tritt fallen können und aussetzen, bis ein neuer, äußerer Impuls erfolgt.

Ein vom Verfasser entwickeltes Verfahren benutzt als einzigen bewegten Teil den beweglichen Eisenkern (Anker) einer Drossel. Hintereinander mit dem zu steuernden Stromverbraucher, etwa einer Glühlampe, wird die Drossel mit beweglichem Eisenkern und ein Halbleiterwiderstand mit hohem negativem T.K. in den Stromkreis der Wechselstrom-Speiseleitung geschaltet. Der bewegliche Anker wird durch eine Feder oder durch sein Eigengewicht so eingestellt, daß der magnetische Kraftschluß möglichst klein ist (kleine Selbstinduktion, kleiner induktiver Widerstand). Wird jetzt die Anordnung unter Spannung gesetzt, so hängt der durchfließende Strom zunächst im wesentlichen von dem Widerstand mit negativem T.K. ab. Die Anlage ist nun so bemessen, daß sich der Widerstand in einer bestimmten, vorgegebenen Zeit (Blinkzeit) erwärmt. Mit der Erwärmung läßt

² DRP 686 608.

³ DRP 645 406, 631 556.

⁴ DRP 647 154.

er Widerstand infolge seiner Charakteristik einen ständig steigenden Strom hindurch, der das Magnetfeld der Drossel verstärkt. Von einer bestimmten Stromstärke an überwindet das Magnetfeld daher die Federkraft (oder das Eigengewicht) des Ankers und zieht ihn an, so daß sich infolge des größeren magnetischen Schlusses die Selbstinduktion plötzlich wesentlich vergrößert. Durch diesen größeren induktiven Widerstand wird der durch die ganze Anordnung fließende Strom erheblich verringert. Damit ist der Widerstand mit negativem T.K. wieder in der Lage, sich weitgehend abzukühlen und so seinen Widerstand entsprechend zu vergrößern. Der verringerte Strom reicht nicht mehr aus, den Anker festzuhalten, so daß er wieder in die Stellung mit geringem magnetischem Fluß (kleine Selbstinduktion) zurückkippt. Der Strom steigt dadurch entsprechend und das Spiel beginnt von neuem. Es ist auch möglich, den temperaturabhängigen Widerstand parallel zur Drossel zu erhalten. Dabei tritt die gleiche Wirkung ein nur mit dem Unterschied, daß bei verringertem (erwärmtem) Widerstand der Anker losläßt und umgekehrt.

Durch geeignete Bemessung der Wärmeträgheit des Widerstandes mit dem negativen T.K. sowie der Selbstinduktion der Drossel und der Stromaufnahme des Verbrauchers läßt sich die gewünschte Blinkzeit einstellen. In Fällen, bei denen der Verbraucher selbst bereits einen großen T.K. seines Widerstandes aufweist (z.B. NERNST-Lampe), kann er selbst zur Steuerung herangezogen werden. Damit entfällt ein besonderer Steuerwiderstand. Es wurde eine Anordnung, bestehend aus einer Drossel mit an einer Feder aufgehängtem Anker und einer NERNST-Lampe, aus-geführt.

Der aufzuheizende Widerstand gibt natürlich je nach seiner Arbeitstemperatur einen erheblichen Teil der Wärme durch Konvektionsströmung bzw. Strahlung an die Umgebung ab. Damit verlängern sich die Aufheizzeit und die Schaltperiode stark. Dies läßt sich vermeiden, wenn an dem beweglichen Anker ein Schirm oder Spiegel befestigt wird, der während der Aufheizzeit durch die Ankerbewegung über den Widerstand geklappt wird und so die Abstrahlung und Konvektionsströmung weitgehend verhindert. In der anderen Ankerstellung — entsprechend der Abkühlungsperiode des Widerstandes — ist der Spiegel weggeklappt und ermöglicht so eine rasche Abkühlung. Wie leicht zu ersehen ist, arbeitet diese Anordnung bei geeigneter Wahl der Wärmeträgheit bzw. der Abkühlungsverhältnisse auch ohne weiteres mit Gleichstrom. Sie stellt also ein „Allstrom“-Gerät dar, bei dem freilich die Periode noch von der Stromart

abhängig ist, wenn nicht die Induktivität der Drossel auf ein Minimum reduziert wird.

Außer den erzeugten periodischen Stromänderungen läßt sich auch die Ankerbewegung selbst zu mechanischer Arbeit heranziehen, etwa zum Antrieb von Rührwerken, Kolbenpumpen oder dergleichen. Der sich periodisch erwärmende und abkühlende Widerstand kann unmittelbar als Gaspumpe Verwendung finden, wenn er z.B. in ein Gefäß mit 2 Ventilen eingebaut wird und hier das Gasvolumen periodisch erwärmt.

Das beschriebene Verfahren gestattet die Erzeugung periodischer Stromänderungen bei Gleich- oder Wechselstrom ohne Anwendung irgendwelcher Kontakte oder beweglicher Teile, die vom Strom durchflossen werden. Die Stromänderungen erfolgen völlig kontinuierlich, Stromstöße und Stromunterbrechungen treten nicht auf, die Anlage ist daher Radio-störfrei. Der bewegliche Anker kann in Kugellagern laufen oder federnd aufgehängt sein (Spannband), wodurch eine Abnutzung praktisch vermieden wird. Die Arbeitsweise wird von Frequenzschwankungen des Betriebsstromes nur unwesentlich beeinflusst. Der Mechanismus setzt sich unter allen Umständen selbsttätig in Gang und kann darin auch durch das Auftreten von Beschleunigungskräften nicht gestört werden.

Zusammenfassung.

Der hohe T.K. und die verhältnismäßig große spezielle Belastbarkeit von Halbleiterwiderständen aus Magnesium-Titan-Spinell (Bezeichnung als „Urdox“-Widerstände¹) erlauben die unmittelbare Steuerung größerer Ströme. Es wird ein Tankinhaltsanzeiger beschrieben, bei dem in die Flüssigkeit eintauchende Widerstände ein Glühlampenschema unmittelbar aufleuchten lassen.

Durch Verbindung eines Halbleiterwiderstandes mit einer variablen Selbstinduktion lassen sich langsam-periodische Änderungen eines Wechselstromes herstellen. Bei geeigneter Wahl der Abkühlung des Widerstandes durch eine mechanisch gesteuerte Belüftung arbeitet diese Anordnung auch mit Gleichstrom, stellt also eine Art „Zerhacker“ dar.

¹ Der Firma Osram, insbesondere den Herren BERG, Dr. MEYER und WEISE bin ich für ihr großes Entgegenkommen bei der Anfertigung geeigneter Urdox-Widerstände, sowie für ihre wertvollen Ratschläge zu großem Dank verpflichtet.

Literatur. [1] MEYER, W.: Z. techn. Phys. 14, 126 (1933). [2] WEISE, E.: Z. techn. Phys. 18, 467 (1937); 24, 66 (1943). — [3] STRAUBEL, H.: Z. techn. Phys. 22, 283 (1941).

Dr. HARALD STRAUBEL, Jena.

Ein allgemeines Lösungsverfahren für inhomogene zylindersymmetrische Wellenfelder.

Von HANS HEINRICH MEINKE, München.

Mit 8 Textabbildungen.

(Eingegangen am 24. Januar 1949.)

In einer früheren Arbeit [1] wurde das Wellenfeld in inhomogenen Bandleitungen durch eine konforme Abbildung auf das Feld zwischen parallelen Ebenen zurückgeführt. Dieses Verfahren läßt sich verallgemeinern auf inhomogene Wellenfelder mit bestimm-

ten Symmetrieeigenschaften, bei denen die Feldkomponenten des dreidimensionalen Raumes nur von zwei passend gewählten Raumkoordinaten abhängen. Die Anwendung auf inhomogene Hohlleiter mit Rechteckquerschnitt wurde bereits von R. PILOTY [2]

erörtert. Im folgenden wird das Verfahren auf zylindersymmetrische Wellenfelder erweitert, unter

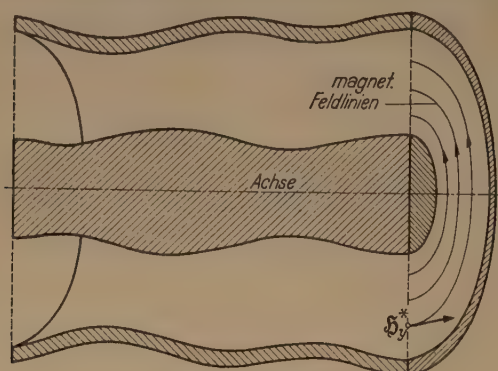


Abb. 1. Inhomogene koaxiale Leitung.

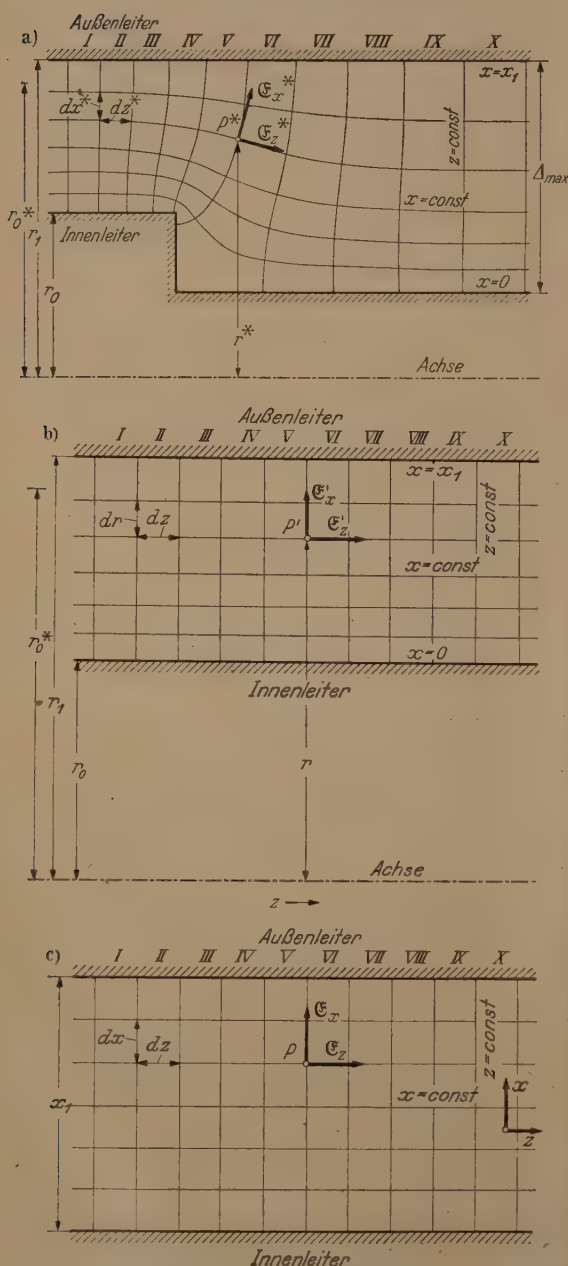


Abb. 2a bis c. Koordinatensysteme.

denen die inhomogene koaxiale Leitung das wichtigste und im folgenden besonders betrachtete Beispiel dar-

stellt. Die Formeln sind jedoch ohne wesentlich Abwandlung anwendbar auf sog. inhomogene radial Leitungen (Zylinderwelle [3], [4]), auf zylindersymmetrische Antennengebilde und inhomogene Hohlleiter mit Kreisquerschnitt, in denen eine zylindersymmetrische Welle läuft.

I. Die inhomogene koaxiale Leitung.

Damit die vorliegende Darstellung kurz gefaßt werden kann, wird die vorhergehende Arbeit [1] zum Vergleich herangezogen. Als inhomogene koaxiale Leitung wird eine axialsymmetrische Leitung nach Abb. 1 bezeichnet, bei der die Durchmesser der Leiter ortsabhängig sind. Im folgenden wird nur der Längsschnitt der oberen Hälfte wie in Abb. 2a gezeichnet. Im Längsschnitt wird ein krummliniges rechtwinkliges Koordinatensystem eingeführt, dessen Koordinatenlinien die elektrischen Feldlinien und die Äquipotentiallinien des elektrostatischen Feldes sind, das entsteht, wenn man zwischen Innenleiter und Außenleiter eine Gleichspannung legt. Ebenso zeigt Abb. 2b Feldlinien und Äquipotentiallinien einer homogenen koaxialen Leitung und Abb. 2c Feldlinien und Äquipotentiallinien zwischen parallelen Ebenen. Diese drei Systeme von Koordinatenlinien sollen eindeutig aufeinander bezogen werden. Abb. 2c enthält ein gewöhnliches rechtwinkliges Koordinatensystem mit den Koordinaten x und z der Punkte P und der Linienelementen dx und dz . x_1 ist der Abstand der leitenden Ebenen. In den drei Fällen der Abb. 2 liegt zwischen den Leitern die gleiche Spannung. Man gibt nun den Äquipotentiallinien in Abb. 2a und b jeweils die Koordinate x derjenigen Äquipotentiallinie der Abb. 2c, die dabei das gleiche Potential hat. Dieses x ist die eine Koordinate der Punkte P^* in Abb. 2a, der Punkte P' in Abb. 2b und der Punkte P in Abb. 2c. Die Feldlinien sollen die Koordinatenlinien $z = \text{const}$ sein, wobei in Abb. 2c die Koordinatendifferenzen dz gleich den wahren Abständen sind. In Abb. 2b soll dz ebenfalls die wahre Länge sein, so daß Abb. 2b und c in der z -Richtung gleiches besitzen, also auch gleiches Linienelement dz . Wenn r_0 und r_1 die Radien der Leiter in Abb. 2b sind, so erhält man als Koordinate x des Punktes P im Abstand r von der Achse

$$x = x_1 \frac{\ln(r/r_0)}{\ln(r_1/r_0)} = r_0^* \ln(r/r_0). \quad (1)$$

Dabei ist zur Vereinfachung der Formeln die Größe

$$r_0^* = \frac{x_1}{\ln(r_1/r_0)} \quad (2)$$

ein „Normalradius“, der von den beliebig zu wählenden Werten x_1 , r_1 und r_0 abhängt. Das radiale Linienelement in Abb. 2b lautet

$$dr = dx \cdot r/r_0^*. \quad (3)$$

Im allgemeinen betrachtet man Inhomogenitäten, die beiderseits in homogenen Leitungen enden. Dann wählt man r_0 und r_1 in Abb. 2b so, daß sie mit den Radien der einen homogenen Seite in Abb. 2a (links) übereinstimmen und überträgt in diesen homogenen Teil der Abb. 2a das Koordinatensystem der Abb. 2b. Den Feldlinien des inhomogenen Teils teilt man dann die Koordinaten z so zu, daß zwischen Linien gleichen

Koordinatenabstandes dz im statischen Feld stets Scheiben konstanter Kapazität dC liegen [7]. Dann werden nach [5] die Linienelemente in Abb. 2a

$$dx^* = K(x, z) \frac{r^*}{r_0^*} dx; \quad dz^* = K(x, z) \cdot dz, \quad (4)$$

wo $K(x, z)$ die die Felddeformation wie in [1] beschreibende Ortsfunktion, $r^*(x, z)$ der Abstand des Punktes P^* von der Achse und r_0^* der „Normalradius“ nach (2) ist. Die Funktion $K(x, z) = dz^*/dz$ in (4) gewinnt man aus einem Vergleich der Längen dz^* im gegebenen Feldbild der Abb. 2a für die verschiedenen Feldteile mit dem entsprechenden dz in Abb. 2c, im allgemeinen also auf graphischem Wege [1].

Es gibt im zylindersymmetrischen Wellenfeld der Abb. 2a elektrische Komponenten \mathcal{E}_x^* entlang der Linien $z = \text{const}$ und \mathcal{E}_z^* entlang der Linien $x = \text{const}$ aber keine Komponente senkrecht zum Längsschnitt. Die magnetischen Feldlinien sind Kreise um die Achse (Abb. 1) in Ebenen senkrecht zur Zeichenebene. Die magnetische Komponente wird mit \mathcal{H}_y^* bezeichnet. Alle Komponenten sind wegen der Zylindersymmetrie nur Funktionen von x und z . Die entsprechenden Komponenten werden in Abb. 2b mit \mathcal{E}_x , \mathcal{E}_z und \mathcal{H}_y , in Abb. 2c mit \mathcal{E}_x , \mathcal{E}_z und \mathcal{H}_y bezeichnet.

II. Die Feldgleichungen.

Stellt man für dieses krummlinige zylindersymmetrische System der Abb. 2a die Feldgleichungen auf, so erhält man nach bekannten Regeln

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\mathcal{E}_x^* K \frac{r^*}{r_0^*} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mathcal{E}_z^* K \left(\frac{r^*}{r_0^*} \right)^2 \right] = 0, \quad (5)$$

$$j\omega \Delta_0 \mathcal{E}_x^* K \frac{r^*}{r_0^*} = - \frac{\partial}{\partial z} \left[\mathcal{H}_y^* K \frac{r^*}{r_0^*} \right], \quad (6)$$

$$j\omega \Delta_0 \mathcal{E}_z^* \left(\frac{r^*}{r_0^*} \right)^2 K = \frac{\partial}{\partial x} \left[\mathcal{H}_y^* K \frac{r^*}{r_0^*} \right], \quad (7)$$

$$\Pi_0 \mathcal{H}_y^* K \frac{r^*}{r_0^*} = \frac{\partial}{\partial x} [\mathcal{E}_z^* K] - \frac{\partial}{\partial z} \left[\mathcal{E}_x^* K \frac{r^*}{r_0^*} \right]. \quad (8)$$

Wenn man Beziehungen dieses Feldes zu dem Wellenfeld der Leitung nach Abb. 2b erhalten will, muß man zwischen den Leitern in Abb. 2b ein Medium einführen, das eine ortsabhängige relative Permeabilität $\mu'(x, z)$ (vgl. [1]) besitzt, außerdem aber eine anisotrope Dielektrizitätskonstante, die für die \mathcal{E}_x -Komponente den Wert 1 und für die \mathcal{E}_z -Komponente den Wert $\epsilon_z(x, z)$ hat. Dann lauten die Gleichungen des Feldes der Abb. 2b mit den Linienelementen dr nach (3) und dz :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\mathcal{E}_x' \frac{r}{r_0^*} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mathcal{E}_z' \epsilon_z \left(\frac{r}{r_0^*} \right)^2 \right] = 0, \quad (5a)$$

$$j\omega \Delta_0 \mathcal{E}_x' \frac{r}{r_0^*} = - \frac{\partial}{\partial z} \left[\mathcal{H}_y' \frac{r}{r_0^*} \right], \quad (6a)$$

$$j\omega \Delta_0 \epsilon_z' \mathcal{E}_z' \left(\frac{r}{r_0^*} \right)^2 = \frac{\partial}{\partial x} \left[\mathcal{H}_y' \frac{r}{r_0^*} \right], \quad (7a)$$

$$j\omega \Pi_0 \mathcal{H}_y' \frac{r}{r_0^*} \mu' = \frac{\partial}{\partial x} [\mathcal{E}_z'] - \frac{\partial}{\partial z} \left[\mathcal{E}_x' \frac{r}{r_0^*} \right]. \quad (8a)$$

Setzt man

$$\mathcal{E}_x^* K \frac{r^*}{r_0^*} = \mathcal{E}_x', \quad \mathcal{E}_z^* K = \mathcal{E}_z', \quad \mathcal{H}_y^* K \frac{r^*}{r_0^*} = \mathcal{H}_y', \quad (9)$$

$$\mu' = K^2, \quad \epsilon_z = \left(\frac{r^*}{r} \right)^2. \quad (10)$$

so stimmen die Gl. (5) bis (8) und (5a) bis (8a) formal überein. Das Wellenfeld der inhomogenen Leitung (Abb. 2a) kann mittels der Gl. (9) umkehrbar eindeutig auf ein Wellenfeld der coaxialen Leitung mit konstantem Querschnitt und inhomogenem Medium nach (10) bezogen werden. Dies ermöglicht ein Lösungsverfahren für das Feld ähnlich wie in [1], wobei jedoch statt der trigonometrischen Funktionen Kombinationen von Zylinderfunktionen auftreten, die den Hohlrohrwellen der coaxialen Leitung entsprechen [6].

Wesentlich einfacher werden jedoch die Lösungsfunktionen, wenn man Analogien zwischen Abb. 2a und c herstellt. In der durch Abb. 2c dargestellten Anordnung muß man ein Medium mit der Permeabilität $\mu(x, z)$ und einer wieder anisotropen Dielektrizitätskonstanten $\epsilon_z(x, z)$ einführen. Damit lauten die Feldgleichungen

$$\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} [\epsilon_z \mathcal{E}_z] = 0, \quad (5b)$$

$$j\omega \Delta_0 \mathcal{E}_x = - \frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial z}, \quad (6b)$$

$$j\omega \Delta_0 \epsilon_z \mathcal{E}_z = \frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial x}, \quad (7b)$$

$$j\omega \Pi_0 \mu \mathcal{H}_y = \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial z}. \quad (8b)$$

Mit den Gleichsetzungen

$$\mathcal{E}_x = \mathcal{E}_x^* K \frac{r^*}{r_0^*}, \quad \mathcal{E}_z = \mathcal{E}_z^* K, \quad \mathcal{H}_y = \mathcal{H}_y^* K \frac{r^*}{r_0^*}, \quad (11)$$

$$\mu = K^2, \quad \epsilon_z = \left(\frac{r^*}{r_0^*} \right)^2. \quad (12)$$

werden die Gl. (5) bis (8) formal identisch mit (5b) bis (8b). Das Wellenfeld der inhomogenen coaxialen Leitung (Abb. 2a) wird also jetzt mittels der Gl. (11) umkehrbar eindeutig auf ein Wellenfeld zwischen parallelen Ebenen und inhomogenem Medium nach (12) bezogen.

Die Lösung für die inhomogene Koaxialleitung der Abb. 2a verlangt also nur eine geringfügige Erweiterung der Formeln von [1] durch das ϵ_z nach (12). Daraus folgt der entsprechende Ansatz für das Eratzfeld der Abb. 2c:

$$\mathcal{E}_x = f_0(z) + f_1(z) \cos \frac{\pi x}{x_1} + f_2(z) \cos \frac{2\pi x}{x_1} + \dots + \left. \begin{aligned} &+ f_n(z) \cos \frac{n\pi x}{x_1} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$\mathcal{E}_z = \frac{1}{\epsilon_z x} \left[f_1(z) \sin \frac{\pi x}{x_1} + 2f_2(z) \sin \frac{2\pi x}{x_1} + \dots + \left. \begin{aligned} &+ n f_n(z) \sin \frac{n\pi x}{x_1} + \dots \end{aligned} \right\} \right], \quad (14)$$

$$\mathcal{H}_y = -j\omega \Delta_0 \left[f_0(z) + f_1(z) \cos \frac{\pi x}{x_1} + \dots + \left. \begin{aligned} &+ f_2(z) \cos \frac{2\pi x}{x_1} + \dots + f_n(z) \cos \frac{n\pi x}{x_1} + \dots \end{aligned} \right\} \right]. \quad (15)$$

Durch diesen Ansatz sind die Gl. (5b) bis (7b) vollständig erfüllt und die Grenzbedingung $\mathcal{E}_z = 0$ für $x = 0$ und $x = x_1$ ebenfalls. Damit nach dem Einsetzen dieser Komponenten in (8b) die Variable x nur noch in cos-Funktionen vorkommt, muß man μ wie in [1] in eine FOURIER-Reihe entwickeln:

$$\mu(x, z) = \mu_0(z) + \mu_1(z) \cos \frac{\pi x}{x_1} + \mu_2(z) \cos \frac{2\pi x}{x_1} + \dots \quad (16)$$

Ebenso aber auch die Funktion $1/\varepsilon_z$:

$$\frac{1}{\varepsilon_z(x, z)} = v_0(z) + v_1(z) \cos \frac{\pi x}{x_1} + v_2(z) \cos \frac{2\pi x}{x_1} + \dots \quad (17)$$

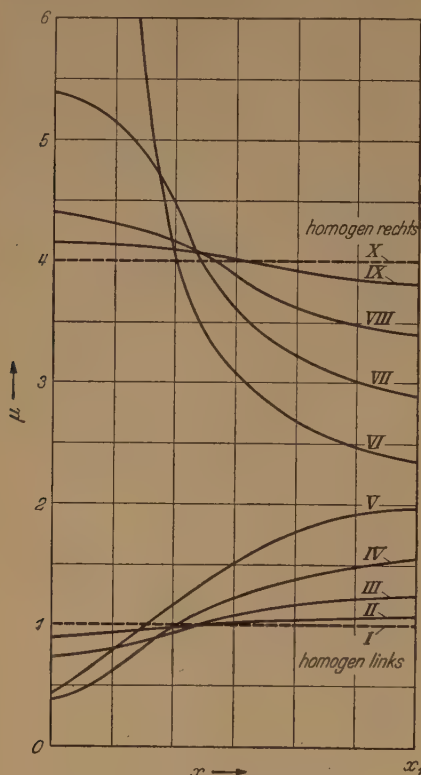


Abb. 3. Permeabilität in Abb. 2c.

Setzt man dies in (14) ein, so kann man in \mathfrak{E}_z alle Produkte $\sin \cdot \cos$ in Summen von \sin -Funktionen verwandeln. In (8b) benötigt man ferner das Produkt

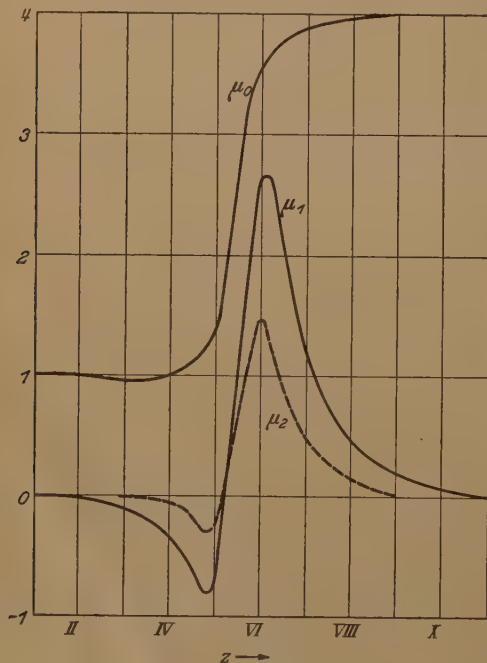


Abb. 4. Koeffizienten μ_n .

$\mu \cdot \xi$ nach (15) und (16), in dem man alle Produkte $\cos \cdot \cos$ in Summen von \cos -Funktionen zerlegt. Setzt man dies alles in (8b) ein, so erhält man die Gleichung des Wellenfeldes, in der man rechts und

links die gleiche \cos -Faktoren enthaltenden Glieder zusammenfaßt [1], [2]. Die Faktoren der verschiedenen \cos -Funktionen geben wie in [1] jeweils für sich eine Gleichung und es entsteht ein unendliches Gleichungssystem. Mit $\omega \sqrt{\Delta_0 \Pi_0} = (2\pi/\lambda_0)^2$ wird für die von \cos freien Glieder

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^2 \left(f_0 \mu_0 + \frac{1}{2} f_1 \mu_1 + \frac{1}{2} f_2 \mu_2 + \dots\right) = -f_0'' \quad (18)$$

wie bei der inhomogenen Bandleitung [1]. Ferner für die Faktoren von $\cos(\pi x/x_1)$

$$\left.\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^2 \left(f_0 \mu_1 + \mu_0 f_1 + \frac{1}{2} f_2 \mu_1 + \frac{1}{2} f_1 \mu_2 + \dots\right)\right\} = \left(\frac{\pi}{x_1}\right)^2 \left(v_0 f_1 + v_1 f_2 - \frac{1}{2} v_2 f_1 + \dots\right) - f_1'' \quad (19)$$

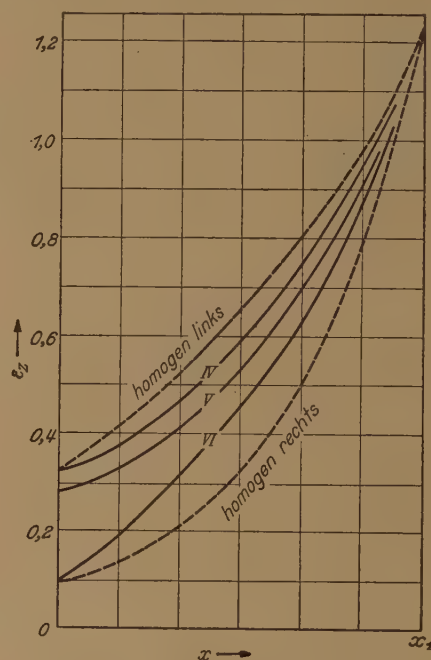


Abb. 5. Dielektrizitätskonstante in Abb. 2c.

und so fort. λ_0 = Wellenlänge im freien Raum. Gegenüber der inhomogenen Bandleitung ist hier statt der Funktion f_1 auf der rechten Seite eine Klammer entstanden.

III. Das fiktive Medium.

Die Feldstreifen der Abb. 2a sind durch römische Ziffern gekennzeichnet. Abb. 3 zeigt den Verlauf des μ nach (12) in Abhängigkeit von x für die einzelnen Streifen. Man erkennt die Ähnlichkeit dieser Kurven mit dem Verlauf des μ beim Abstandssprung der Bandleitung nach [1] und erhält dementsprechend in Abb. 4 auch eine durchaus analoge FOURIER-Analyse des μ nach (16). Abb. 5 zeigt den Verlauf der Funktion ε_z nach (12) mit r_0^* nach (2). Man erhält eine Funktion, die mit wachsendem x proportional zu r^{*2} ansteigt. Abb. 6 gibt die drei ersten FOURIER-Koeffizienten des $1/\varepsilon_z$ nach (17). Die Kurve v_0 verläuft ähnlich wie μ_0 . Während jedoch die μ_n für $n \geq 1$ nur in den inhomogenen Bezirken auftreten, findet man v_n nennenswerter Größe auch im homogenen Teil, und zwar werden sie um so größer, je dünner der Innenleiter im Verhältnis zum Außenleiter ist. Der in [1] dargestellte Fall der inhomogenen Bandleitung ist der

Sonderfall mit extrem großen Radien der coaxialen Leitung, wo $v_0 = 1$ und $v_n = 0$ für $n \neq 0$ ist. Das im folgenden dargestellte Lösungsverfahren ist also gleichzeitig eine Fortführung der in [1] begonnenen Gedanken zur inhomogenen Bandleitung und ebenso auf den Rechteckhohlleiter in [2] anwendbar.

IV. Die Lösung der Grundgleichung.

Die durch unendliche Funktionsreihen dargestellten Gleichungen verlangen das Lösungsverfahren der schrittweisen Näherung. Die praktische Anwendung muß sich auf *gut* konvergierende Fälle beschränken, da sonst der Aufwand zu groß wird. Man darf daher voraussetzen, daß die Folge der μ_n und die Folge der v_n gut konvergiert. Starke Inhomogenitäten mit extremen Verzerrungen seien daher ausgeschlossen (genaue Definition in V). Ferner soll die Folge der f_n gut konvergieren. Dann darf sich die Betriebswellenlänge λ_0 einer bestimmten Grenzwellenlänge (38), bei der sich der niedrigste Typ einer Hohlrohrwelle ausbilden kann, nicht zu sehr nähern. Die vorzugsweise interessierenden Probleme erfüllen diese Forderung meist recht gut. Um eine einfache und einheitliche Darstellung zu gewinnen, schreibt man (18) in der Form

$$f_0'' = -\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^2 f_0 \mu_0^* \quad (20)$$

mit

$$\mu_0^* = \mu_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\mu_1}{\mu_0} \frac{f_1}{f_0} + \dots + \frac{1}{2} \frac{\mu_n}{\mu_0} \frac{f_n}{f_0} + \dots\right). \quad (21)$$

Voraussetzungsgemäß ist μ_0^* eine sehr gut konvergierende Reihe. Es ist günstig, (20) *formal* als die Gleichung für die magnetische Feldstärke einer ebenen Welle in einem Medium mit ortsabhängiger Permeabilität $\mu_0^*(z)$ zu deuten. Diese Welle läuft dann zwischen den leitenden Ebenen (Abb. 2c), die den Abstand x_1 besitzen und senkrecht zur Zeichenebene die Breite y_1 haben sollen. Der Strom längs dieser Leitung ist formal zu definieren als

$$\mathfrak{I} = y_1 \mathfrak{I}_y = -j \omega \Delta_0 y_1 f_0 \quad (22)$$

und die Spannung zwischen den Leitern entsprechend

$$\mathfrak{U} = x_1 \mathfrak{E}_x = x_1 f_0'. \quad (23)$$

Der Widerstand der Leitung im Punkt z lautet dann

$$\mathfrak{R} = \frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{I}} = j \frac{1}{\omega \Delta_0} \frac{x_1}{y_1} \frac{f_0'}{f_0} = j \frac{\lambda_0}{2\pi} Z_0 \frac{f_0'}{f_0}. \quad (24)$$

$$Z_0 = \frac{x_1}{y_1} \sqrt{\frac{\Pi_0}{\Delta_0}} \quad (25)$$

ist der Wellenwiderstand und

$$\alpha_0 = 2\pi/\lambda_0 = \omega \sqrt{\Pi_0 \Delta_0} \quad (26)$$

die Phasenkonstante der Bandleitung ohne Medium. (20) formt man mit Hilfe von (24) in eine Differentialgleichung erster Ordnung um:

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{\mathfrak{R}}{Z_0} \right) = j \frac{2\pi}{\lambda_0} \left[\left(\frac{\mathfrak{R}}{Z_0} \right)^2 - \mu_0^* \right]. \quad (27)$$

An sich ist im inhomogenen Feld die Definition eines Widerstandes im üblichen Sinn nicht möglich, da nach [7] die Komponente \mathfrak{E}_z keine induktions- und verschiebungsstromfreien Definitionsflächen entstehen läßt. Die Definition der Gl. (24) ist also rein

formaler Natur, die aber beim Übergang in die anschließenden homogenen Felder in den wirklichen Widerstand übergeht. Mit abnehmender Frequenz werden nach [1] die f_n , also auch \mathfrak{E}_z schnell kleiner und das \mathfrak{R} nach (24) nähert sich auch im inhomogenen Feld immer mehr dem üblichen Widerstand. (24) kann also als eine sinnvolle Erweiterung des Widerstandsbegriffs betrachtet werden. (27) gibt dann eine Gleichung für die Widerstandstransformation eines Leitungsstücks der Länge dz mit dem Wellenwiderstand $Z = Z_0 \sqrt{\mu_0^*}$ und der Phasenkonstanten $\alpha = 2\pi/\lambda = \alpha_0 \sqrt{\mu_0^*}$, die man über die ganze Länge der Inhomogenität integrieren muß. Um das an sich

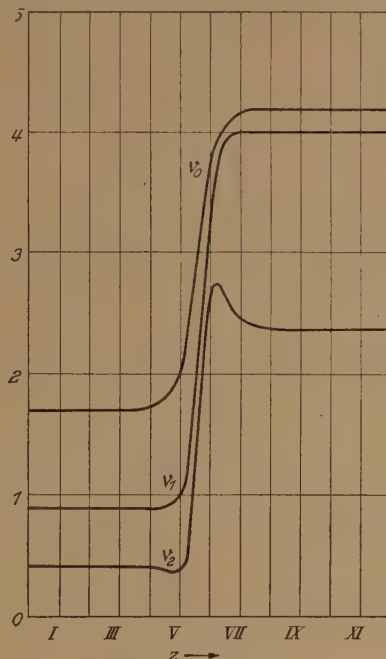


Abb. 6. Koeffizienten v_n .

umfangreiche Problem zu vereinfachen, wählt man folgenden Weg: Die beiderseits an homogene Leitungen grenzende Inhomogenität betrachtet man als einen verlustfreien Vierpol [8], den man durch drei reelle Vierpolkonstanten beschreiben kann. Wenn man diese Konstanten kennt, kann man nach der Vierpoltheorie die Transformation beliebig komplexer Widerstände leicht berechnen. Man sucht also zweckmäßig zunächst die Vierpolkonstanten der Inhomogenität. Zu diesem Zweck braucht man nur die Widerstandstransformation für drei reine *Blindwiderstände* zu kennen, und findet aus drei Blindtransformationen die drei Vierpolkonstanten. Die folgenden Erörterungen können sich also auf reine Blindwiderstände $\mathfrak{R} = jX$ beschränken. Dann werden die f_n *reelle Funktionen* und alle Gleichungen reell. Mit $\mathfrak{R} = jX$ wird aus (27)

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{X}{Z_0} \right) = -\frac{2\pi}{\lambda_0} \left[\left(\frac{X}{Z_0} \right)^2 + \mu_0^* \right]. \quad (28)$$

Aus dem so berechneten X/Z_0 erhält man $f_0(z_1)$ für irgendeinen Ort z_1 der Leitung, wenn z. B. $f_0(z_e)$ am Eingang des Vierpols ($z = z_e$) gegeben ist, durch Integration von (24) als

$$f_0(z_1) = f_0(z_e) \cdot \exp \left[\frac{2\pi}{\lambda_0} \int_{z_e}^{z_1} \left(\frac{X}{Z_0} \right) dz \right]. \quad (29)$$

Da ein allgemeines Integrationsverfahren für (28) bisher nicht bekannt ist, muß ein Näherungsverfahren benützt werden, dessen Grundlage die folgende Erkenntnis ist: Man entwickelt die Reihe

$$\frac{X(z)}{Z_0} = \frac{X(z_0)}{Z_0} + (z - z_0) \left[\frac{d}{dz} \left(\frac{X}{Z_0} \right) \right]_{z=z_0} + \dots \quad (30)$$

und setzt den ersten Differentialquotienten nach (28) ein. Die höheren Differentialquotienten erhält man durch Differenzieren von (28). Setzt man X/Z_0 aus (30) in die rechte Seite von (28) ein und integriert von $z_1 = z_0 - \Delta z/2$ bis $z_2 = z_0 + \Delta z/2$, so erhält man die Widerstandstransformation durch das Leitungstück der Länge Δz (Mittelpunkt z_0) vom Wert $X(z_1)$ nach $X(z_2)$ in der Form

$$\frac{X(z_2)}{Z_0} - \frac{X(z_1)}{Z_0} = -\frac{2\pi \Delta z}{\lambda_0} \left[\left(\frac{X(z_0)}{Z_0} \right)^2 + \bar{\mu}_0 \right] + \dots \quad (31)$$

Dabei ist

$$\bar{\mu}_0 = \frac{1}{\Delta z} \int_{z_1}^{z_2} \mu_0^*(z) dz \quad (32)$$

der integrale Mittelwert des μ_0^* in dem Bereich Δz . Das nächste Glied in (31) enthält den Faktor $(2\pi \cdot \Delta z / \lambda_0)^3$. Dann folgen Glieder mit höheren Potenzen von $2\pi \cdot \Delta z / \lambda_0$. Wenn man die Rechengenauigkeit vorschreibt, kann man aus den Restgliedern in (31) bestimmen, bis zu welchem $\Delta z / \lambda_0$ das in (31) dargestellte erste Glied die Transformation ausreichend genau beschreibt. Man sieht dabei, daß dieses durchweg noch für relativ große Δz gilt. Man teilt nun die gesamte Inhomogenität in hinreichend kleine Bereiche Δz . In jedem Bereich darf dann bei der Widerstandstransformation nach (28) an Stelle des μ_0^* der Mittelwert $\bar{\mu}_0$ nach (32) eingesetzt werden, wodurch die Lösung wesentlich einfacher wird. Die inhomogene Leitung mit ortsabhängigem μ_0^* wirkt also mit definierter, beliebig hoher Genauigkeit wie eine Folge von Leitungsstücken Δz mit jeweils konstanter Permeabilität $\bar{\mu}_0$. In dieser Form paßt das Verfahren zu der graphischen Auswertung nach Abb. 2 bis 6, bei denen ja die μ_n und ν_n auch immer nur als Mittelwerte eines Streifens endlicher Breite gewonnen werden. Für reine Blindvorgänge lautet die Lösung von (28) innerhalb eines Bereichs Δz mit konstanter Permeabilität $\bar{\mu}_0$

$$\frac{X(z)}{Z_0} = -\sqrt{\bar{\mu}_0} \operatorname{tg} \left\{ \frac{2\pi}{\lambda_0} \left[l_0 + (z - z_1) \sqrt{\bar{\mu}_0} \right] \right\} \quad (33)$$

mit einer Integrationskonstanten l_0 , die sich aus dem Wert des X an der Grenze $z = z_1$ zum Nachbarbereich ergibt:

$$\frac{X(z_1)}{Z_0} = -\sqrt{\bar{\mu}_0} \operatorname{tg} \frac{2\pi l_0}{\lambda_0} \quad (34)$$

Zur einfachen Auswertung von (33) und zur Bestimmung der Vierpolkonstanten wurde ein Diagramm entwickelt, das in einer späteren Arbeit [12] zusammen mit mehreren Beispielen beschrieben werden soll. Das Verfahren wird dadurch so einfach, daß man auch Inhomogenitäten mit vielen Δz -Bereichen mühelos berechnen, insbesondere auch die Δz -Teilung stets so fein machen kann, daß sie die Mindestforderungen weit übertrifft.

V. Die Funktionen f_n .

Um das f_0 bzw. X zu berechnen, benötigt man im μ_0^* nach (21) noch die Quotienten f_n/f_0 . Im Rahmen der oben erwähnten und später noch genau

diskutierten Einschränkungen konvergiert die in μ_0^* enthaltene Reihe sehr gut. Die Genauigkeit der Bestimmung des f_0 bzw. des X leidet daher nicht, wenn man in μ_0^* für f_n/f_0 Näherungen mit gewissen Fehlern benutzt, weil die betreffenden Glieder relativ klein sind. Außerdem ist für die Widerstandstransformation nach (31) nur der integrale Mittelwert $\bar{\mu}_0$ wirksam, so daß für die benutzten Näherungen nur der Mittelwert des $\frac{1}{2} (\mu_n/\mu_0) \cdot (f_n/f_0)$ in jedem Bereich Δz hinreichend genau zu sein braucht. Die Anforderungen an die verwendbaren Näherungen für f_n/f_0 sind also gering. Während eine Lösung f_0 , die aus der Anwendung bekannter Verfahren entsteht, meist kompliziert wird, erhält man mit einer zweckmäßigen, auf genauem Studium der zulässigen Fehler der f_n/f_0 begründeten Auswahl von Näherungsfunktionen f_n/f_0 wesentlich einfachere und für die praktische Anwendung befriedigendere Ausdrücke. Die Gl. (19) usw. haben stets die Form

$$(2\pi/\lambda_0)^2 (f_0 \mu_n + \dots) = (n\pi/x_1)^2 (v_0 f_n + \dots) - f_n''.$$

Man ordne sie:

$$f_n'' = \left(\frac{n\pi}{x_1} \right)^2 \left[f_n(z) M_n(z) - \left(\frac{2x_1}{n\lambda_0} \right)^2 f_0(z) N_n(z) \right]. \quad (35)$$

Wenn die Folgen f_n , μ_n und ν_n gut konvergieren, ist M_n im wesentlichen gleich v_0 und N_n im wesentlichen gleich μ_n .

Prinzipiell lassen sich diese Gleichungen nach den in [2] dargestellten Methoden lösen. Da es sich zeigt, daß auch f_1 im allgemeinen nur als kleine Korrektur in (21) wirksam wird, soll nach der folgenden Methode lediglich bewiesen werden, daß unter gewissen, durchaus tragbaren Beschränkungen die f_n mit $n > 1$ vernachlässigt werden können. Einige genau definierbare Extremfälle werden dabei von der Behandlung ausgeschlossen. Die Leitung ist nach IV in kleine Abschnitte Δz geteilt, für die jeweils der konstante Mittelwert $\bar{\mu}_0$ als bestimmend angesetzt wurde. Zur Lösung von (35) sei daher ebenfalls angenommen, daß innerhalb jedes dieser Bereiche Δz die konstanten Mittelwerte \bar{M}_n und \bar{N}_n benutzt werden dürfen. Man definiert charakteristische Wellenlängen

$$\lambda_n = \frac{2x_1}{n} \sqrt{\frac{\bar{\mu}_0}{\bar{M}_n}} \approx \frac{2x_1}{n} \sqrt{\frac{\bar{\mu}_0}{v_0}}. \quad (36)$$

Die Lösung f_n in einem Bereich Δz lautet dann

$$\left. \begin{aligned} f_n &= f_0 \underbrace{\frac{\bar{N}_n}{\bar{\mu}_0} \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_0} \right)^{2i}}_{\text{I}} + \\ &+ \underbrace{A_n \cdot \exp \left(\frac{n\pi z}{x_1} \sqrt{\bar{M}_n} \right) + B_n \cdot \exp \left(-\frac{n\pi z}{x_1} \sqrt{\bar{M}_n} \right)}_{\text{II}} \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Die Reihen sind nur konvergent für $\lambda_0 > \lambda_n$. Mit wachsender Frequenz (abnehmendem λ_0) wird die Konvergenz zuerst bei f_1 aufhören, wenn an irgendeinem Ort z der Leitung $\lambda_0 = \lambda_1$ wird, und zwar dort, wo $\bar{\mu}_0/\bar{M}_1$ sein Maximum hat.

Die im vorliegenden Verfahren gegebenen Möglichkeiten sind nur dann sinnvoll anwendbar, wenn $\lambda_0 > \lambda_1$ bleibt, weil für noch höhere Frequenzen sehr bald der Zustand eintritt, daß sich neben der Hauptwelle Hohlrohrwellen ablösen. Dadurch würde sich

das Feld so ändern, daß das hier als Ausgangspunkt gewählte elektrostatische Feld keine vernünftige erste Näherung mehr darstellt. Δ_{\max} sei im inhomogenen Feld der Abb. 2a der größte Abstand zwischen Innenleiter und Außenleiter. λ_1 ist nur wenig größer als die Grenzwelle der E_{01} -Welle in einer coaxialen Leitung [9]. Es gelten daher die einfachen Regeln

$$(\lambda_1)_{\max} \approx 2 \Delta_{\max}, \quad \lambda_n < (\lambda_1)_{\max}/n. \quad (38)$$

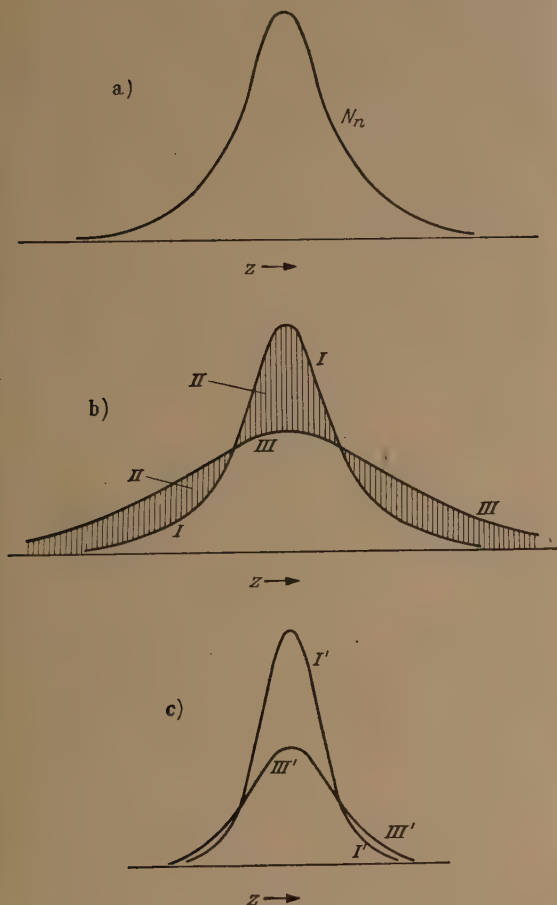


Abb. 7 a–c. Sprungstelle mit einer μ_n -Spitze.

Mit der Einschränkung $\lambda_0 > (\lambda_1)_{\max}$ für die verwendeten Betriebsfrequenzen konvergieren die Reihen in (37) für $n > 1$ so gut, daß nur ihr *erstes* Glied interessiert. A_n und B_n sind Integrationskonstanten, die so festzulegen sind, daß die f_n an den Grenzen des Bereiches Δz die gleichen Funktionswerte und gleichen ersten Ableitungen haben wie die Funktionen der Nachbarbereiche. Die μ_n treten nach Abb. 4 stets in Spitzen auf. Abb. 7a zeigt den typischen Verlauf des N_n in einem Feld mit nur einer Spitze. In Abb. 7b findet man als Kurve I den zugehörigen Verlauf des Anteils I in (37), in Kurve III das ganze f_n . Die schraffierten Teile zeigen den Anteil II in (37), der stets so wirkt, daß die Schwankungen der Kurve I ausgeglichen werden. Vgl. Formel (42). Abb. 8a zeigt den Vergleich der entsprechenden Kurven für ein N_n mit Doppelspitze, wie es den Verhältnissen der Abb. 4 entsprechen würde. Die Spitzenwerte des f_n sind stets kleiner als die Spitzenwerte der Kurve I. Abb. 7c und 8b zeigen die aus dem f_n herrührenden Korrekturen $\frac{1}{2}(\mu_n/\mu_0)^2 \cdot f_n/f_0$ im μ_0^* nach (21) und zwar in Kurve III die Wirkung des gesamten f_n , in

Kurve I die Wirkung des Anteils I in (37). Wenn man also in (21) nur den Anteil I des f_n berücksichtigt, bekommt man einen Kurvenverlauf des μ_0^* , der zwar annähernd *richtige Form*, aber in den Spitzen etwas zu große Werte hat. Je ausgeglichener der Verlauf des N_n , desto geringer ist der Anteil II des f_n . Wenn man zunächst Wert auf eine einfache Formel für μ^* legt, die das Grundsätzliche deutlich zeigt, ohne extrem genau zu sein, so ersetzt man f_n durch seinen halben Anteil I unter Beschränkung auf das erste Reihenglied. Mit $M_n \approx \nu_0$ und $N_n \approx \mu_n$ wird dann aus (21)

$$\mu_0^* = \mu_0 \left[1 + \left(\frac{x_1}{\lambda_0} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\mu_n}{n \sqrt{\nu_0 \mu_0}} \right)^2 \right]. \quad (39)$$

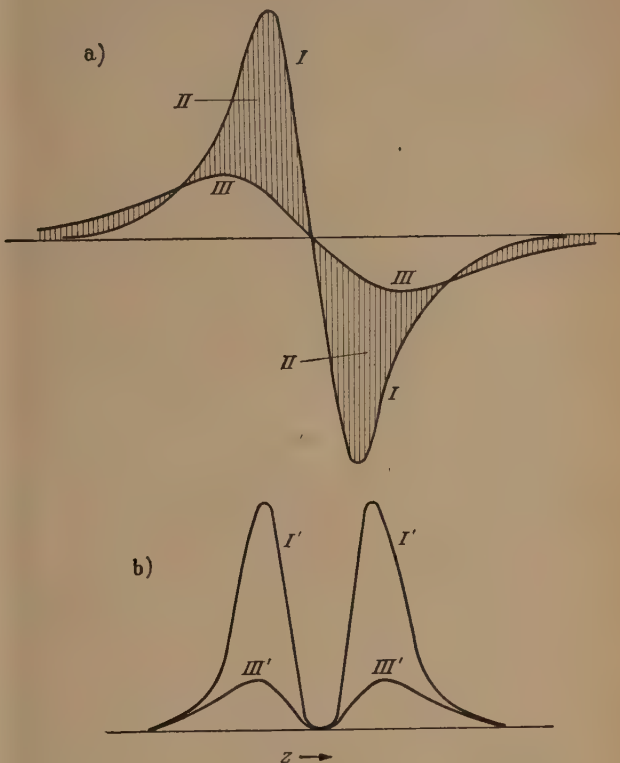


Abb. 8 a u. b. Sprungstelle mit zwei μ_n -Spitzen.

Die Inhomogenität wirkt also wie eine Leitung mit *frequenzabhängigem* Wellenwiderstand, wobei die μ_n die Ursache dieser Frequenzabhängigkeit sind. Maßgebend für den Umfang der Frequenzabhängigkeit ist das Verhältnis x_1/λ_0 . (39) ist erfahrungsgemäß bereits sehr gut brauchbar, eignet sich aber in jedem Fall zur Abschätzung der Größenordnung der in (21) auftretenden Glieder, da sie die Extremwerte durchweg noch zu hoch angibt. Die Wirkung der f_n sinkt mit wachsendem n wie $(\mu_n/n)^2$ und mit wachsender Frequenz wie $1/\lambda_0^2$. Da Glieder unter 0,01 in der eckigen Klammer praktisch nicht interessieren, stellt man durch (39) fest, welche Teile von vornherein vernachlässigt werden können und reduziert dadurch das Problem erheblich. Man wird dabei feststellen, daß man selbst in extremen Fällen die Wirkung der f_n mit $n > 1$ vernachlässigen kann.

VI. Die Funktion f_1 .

Auch f_1 kann man sehr oft noch vernachlässigen und dadurch das Problem auf die Lösung von (20) mit $\mu_0^* = \mu_0$ zurückführen (frequenzunabhängiger

Wellenwiderstand). Dann muß das entsprechende Glied in (39) für alle z kleiner als 0,01 sein, also

$$\lambda_0 > 10 x_1 \left(\frac{\mu_1}{\sqrt{\mu_0 v_0}} \right)_{\max} \approx 10 A_{\max} \left(\frac{\mu_1}{\mu_0} \right)_{\max}. \quad (40)$$

Näheres in [7]. Solange man λ_0 der in (38) genannten Frequenzgrenze $(\lambda_1)_{\max}$ nicht weiter als auf einen Faktor 0,7 nähert, bleibt die durch f_1 im μ_0^* erzeugte Korrektur klein und man kann der verwendeten Funktion f_1 gewisse Fehler gestatten, ohne die Genauigkeit des f_0 zu gefährden. Der Wellenwiderstand erhält dann einen frequenzabhängigen Anteil in der Umgebung der μ_1 -Spitzen (Abb. 7c und 8b). Außerhalb dieser Spitzen wird dieser Anteil so schnell klein, daß es lediglich darauf ankommt, die benutzte Funktion f_1 in unmittelbarer Nähe der Spitzen hinreichend genau zu berechnen. Es gibt zahlreiche Möglichkeiten, zu einer praktisch brauchbaren Lösung von f_1 zu kommen. Eine erste Lösung für f_1 erhält man durch (37) für $n = 1$. Bei Vernachlässigung aller f_n mit $n > 1$ wird dabei

$$N_1 = \mu_1, \quad M_1 = \left(v_0 - \frac{1}{2} v_2 \right) - \left(\frac{2x}{\lambda_0} \right)^2 \left(\mu_0 + \frac{1}{2} \mu_2 \right). \quad (41)$$

Die in (37) benötigte Funktion f_0 bestimmt man im Rahmen der zulässigen Fehler des f_1 hinreichend genau aus (20), wenn dort μ_0^* näherungsweise durch μ_0 ersetzt wird. Die bereits genannten Grenzbedingungen ergeben lineare Gleichungen für A_1 und B_1 , deren Anzahl doppelt so groß ist wie die Zahl der Bereiche Δz . Die jeweils zweckmäßigste Einteilung in Bereiche Δz hängt vom gegebenen Einzelfall ab und kann nur an Hand von Beispielen erörtert werden.

Eine andere, in sehr vielen Fällen brauchbare Näherung lautet

$$f_1(z) = \frac{2\pi x_1}{\lambda_0^2} \int_{z_1}^{z_2} \frac{f_0(\zeta) \cdot \mu_1(\zeta)}{\sqrt{M_1(\zeta)}} \cdot \exp \left[-\frac{\pi}{x_1} \sqrt{M_1(\zeta)} |z - \zeta| \right] d\zeta. \quad (42)$$

Dabei ist z_1 die untere und z_2 die obere Grenze des Inhomogenitätsbereichs, den man als den Bereich definieren kann, in dem μ_1 merklich von Null verschiedene Werte annimmt. ζ ist die laufende Koordinate im Integrationsbereich. Setzt man dies unter Benutzung von (41) in (35) für $n = 1$ ein, so zeigt sich, daß (42) eine brauchbare Näherung ist, solange für alle z

$$\left. \begin{aligned} & \frac{2\pi x_1}{\lambda_0^2} \int_{z_1}^{z_2} \frac{f_0(\zeta) \cdot \mu_1(\zeta)}{\sqrt{M_1(\zeta)}} (M_1(\zeta) - M_1(z)) \times \\ & \times \exp \left[-\frac{\pi}{x_1} \sqrt{M_1(\zeta)} |z - \zeta| \right] d\zeta \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

klein gegen $|f_1|$ ist. Dies ist weitgehend der Fall, da $M_1(z) - M_1(\zeta)$ zwar mit wachsendem $|z - \zeta|$ wächst, aber nur mit der Exponentialfunktion multipliziert auftritt, die mit wachsendem $|z - \zeta|$ schnell abnimmt. Im allgemeinen hat $M_1(z) - M_1(\zeta)$ im Integrationsbereich wechselndes Vorzeichen, so daß sich Teile des Integrals (43) gegenseitig aufheben, insbesondere in der für die Genauigkeit wichtigen Zone der großen f_1 -Werte. Ferner nimmt $M_1(z) - M_1(\zeta)$ meist mit wachsender Frequenz ab, so daß bei höheren Frequenzen, bei denen das f_1 im μ_0^* von größerem Einfluß ist, die Genauigkeit des f_1 nach (42) nicht ungünstiger wird. (42) ist eine sehr anschauliche Formel: Jeder Wert $f_0(\zeta) \cdot \mu_1(\zeta)$ der Inhomogenität gibt zum

$f_1(z)$ einen Beitrag, der mit der Exponentialfunktion multipliziert ist. Mit wachsendem Abstand zwischen z und ζ nimmt also die Mitwirkung des $f_0 \mu_1$ am f_1 schnell ab. Das Integral (42) erläutert auch die Tatsache, daß in Abb. 7b und 8a die Schwankungen der f_1 -Kurve wesentlich geringer als die Schwankungen der Kurve I sind. Für die graphische Auswertung von (42) sind einfache Verfahren entwickelt worden, so daß das Gesamtproblem der inhomogenen coaxialen Leitung (einschließlich ebenem inhomogenem Feld) mit der praktisch befriedigenden Genauigkeit von 1% in den meisten Fällen ohne größeren Aufwand gelöst ist. Insgesamt erweist sich der Einfluß des f_1 auf das μ_0^* und damit auf die Endlösung f_0 durchweg als äußerst gering. So konnte z. B. das Problem des reflexionsfreien Hohlleiterwinkels noch fast ohne Mitwirkung des f_1 gelöst werden [12].

Der in Abb. 2 dargestellte Fall ist in [6] näherungsweise berechnet und die Frequenzabhängigkeit in [10] nochmals genauer untersucht worden. Diese Ergebnisse konnten nach dem hier dargestellten Verfahren bestätigt werden [11]. Die Fehler unserer graphischen Methode liegen dabei in der gleichen Größenordnung wie die Fehler der erwähnten rein mathematischen Näherungen.

Zusammenfassung.

Da keine Aussicht besteht, das allgemeine zylindersymmetrische Wellenfeld wegen der komplizierten Randbedingungen mathematisch exakt zu lösen, wird eine Koordinatentransformation durchgeführt, die das Problem auf das Wellenfeld zwischen zwei parallelen Ebenen zurückführt (Abb. 2). Dazu muß ein inhomogenes Medium nach (10) eingeführt werden. Durch den Ansatz (13) bis (15) werden die Feldgleichungen in ein unendliches Gleichungssystem (18), (19) usw. verwandelt. In Abschnitt V wird bewiesen, daß im Normalfall neben f_0 nur die Funktion f_1 eine Rolle spielt. Dann bleiben 2 Gleichungen, von denen die eine durch (33), die andere durch (42) gelöst ist. Die Inhomogenität wirkt wie eine Bandleitung mit der frequenzabhängigen Permeabilität $\mu_0^*(z)$ nach (21), deren Bestandteile in erster Näherung in (39) dargestellt sind. Die Frequenzabhängigkeit ist bedingt durch die in (16) entwickelten FOURIER-Koeffizienten μ_n des μ und das frequenzabhängige Glied in (39) wächst in erster Näherung quadratisch mit der Frequenz. Das Wellenfeld einer zylindersymmetrischen Inhomogenität ist also lösbar, sobald ihre für das Abbildungsverfahren benötigten statischen Feldlinien und Äquipotentiallinien bekannt sind. Auf diese Weise hat man die Möglichkeit zur Untersuchung recht allgemeiner Bauelemente gewonnen.

Literatur. [1] MEINKE, H.: Z. angew. Phys. 1, 245 (1948). [2] PILLOT, R.: Z. angew. Phys. 1, 441 u. 490 (1949). — [3] MEINKE, H.: Theorie der Hochfrequenzschaltungen. München 1949. [4] MONTGOMERY, C. G., R. H. DICKE und E. M. PURCELL: Principles of Microwave Circuits. New York 1948. — [5] KUPFMÜLLER, K.: Einführung in die theoretische Elektrotechnik, 3. Aufl. Berlin 1941. — [6] WHINNERY, J. R., H. W. JAMESON und T. E. ROBINS: Proc. I. R. E. 32, 695 (1944). — [7] MEINKE, H.: Z. angew. Phys. 1, 90 (1948). — [8] WEISSFLOCH, A.: Z. Hochfrequenztechn. 60, 67 (1942). — [9] BORGNIS, F.: Z. Hochfrequenztechn. 56, 47 (1940). — [10] MILES, J. W.: Proc. I. R. E. 35, 1498 (1947). — [11] KRAUS, A.: Diss. T. H. München (D 91). — [12] MEINKE, H., u. W. ENNERST: Erscheint demnächst.

Prof. Dr. HANS HEINRICH MEINKE,
Institut für Hochfrequenztechnik der T. H. München.

Strahlwege von Radiowellen in der Ionosphäre.

Zweite Mitteilung.

Theoretische Grundlagen.

Von H. POEVERLEIN, München.

Mit 8 Textabbildungen.

(Eingegangen am 19. Mai 1949.)

A. Einleitung.

Es wurden die Wege von Radiowellen theoretisch untersucht, die in beliebiger Richtung (vertikal oder schief) in die Ionosphäre einfallen und in der Ionosphäre reflektiert werden, also aus der Ionosphäre unten wieder austreten. Das Erdmagnetfeld bewirkt bekanntlich Aufspaltung eines jeden Strahls in zwei Komponenten (ordentliche und außerordentliche), die beide verschiedene Wege zurücklegen; es hat auch wesentlichen Einfluß auf den Verlauf der Wege. Das Erdmagnetfeld wurde daher berücksichtigt. Hierdurch unterscheiden sich die vorliegenden Untersuchungen von anderen Arbeiten, in denen schon Strahlwege berechnet wurden, aber unter Vernachlässigung des Erdmagnetfelds.

Mittels eines graphischen Verfahrens kann man die Strahlwege von Radiowellen in der Ionosphäre unter gewissen Voraussetzungen konstruieren. H. G. BOOKER [1] gab schon eine theoretische Methode zur Ermittlung von Strahlwegen unter Berücksichtigung des Erdmagnetfelds an und fand dabei auch schon einige Besonderheiten der Strahlwege. Das neue graphische Verfahren ist aber anschaulicher und einfacher zu handhaben als BOOKERs Methode.

Das Verfahren ist in einer ersten Veröffentlichung [2] entwickelt; auch einige Bilder von typischen Strahlwegen sind dort gezeigt. Man sieht darin beispielsweise den Verlauf eines vertikal in die Ionosphäre einfallenden ordentlichen und außerordentlichen Strahls. Auch diese legen ja infolge des Erdmagnetfelds gekrümmte Wege zurück [1], [2], [3], [3a]. Bei schief einfallenden Strahlen fällt besonders auf, daß es neben den regulären Strahlwegen, die an der Reflexionsstelle horizontal werden, auch noch Wege mit einer Spitze an der Reflexionsstelle gibt, wie sie ohne Erdmagnetfeld nicht möglich wären. Einige weitere Ergebnisse und Folgerungen sind ebenfalls in der ersten Mitteilung [2] besprochen.

Die vorliegende zweite Mitteilung bringt ausführlich verschiedene theoretische Grundlagen, die bei der Konstruktion der Strahlwege benötigt werden. Dadurch soll deutlich werden, wie die Besonderheiten zustande kommen und wie alles von den gewählten Voraussetzungen abhängt. Man kann sich dann leicht überlegen, wie etwa die Strahlwege sich ändern, wenn man zu anderen Voraussetzungen (z. B. andere geographische Breite, andere Bedingungen in der Ionosphäre) übergeht.

Um beliebige Fälle behandeln zu können, ist es zunächst wichtig, daß man einen Überblick gewinnt über die Abhängigkeit des Brechungsindex von der Elektronenkonzentration und von der Richtung der Wellennormale (Abschnitt D und F) und daß man eine klare Unterscheidung trifft zwischen den beiden möglichen Strahlkomponenten, dem ordentlichen und dem außerordentlichen Strahl (Abschnitt D). Es werden im folgenden vor allem graphische Darstel-

lungen des Brechungsindex in Abhängigkeit von der Richtung der Wellennormale gebracht, aus denen heraus sich Strahlwege konstruieren lassen (Abschnitt E und F). Bei der Diskussion der graphischen Darstellungen ergeben sich schon Folgerungen für die Strahlwege.

Eine demnächst erscheinende Veröffentlichung soll zahlreiche Strahlwege in Bildern zeigen.

B. Anwendung des Brechungsgesetzes.

Die Ionosphäre sei eben geschichtet, von der Erdkrümmung werde abgesehen; die Elektronenkonzentration soll also nur eine Funktion von der Höhe über der ebenen Erde sein. Dann gilt für elektrische Wellen in der Ionosphäre das Gesetz, daß die Wellennormale stets in der Einfallsebene bleibt, und das Brechungsgesetz

$$n \sin \varphi = \sin \varphi_0, \quad (1)$$

n = Brechungsindex,
 φ = Winkel der Wellennormale gegen die Vertikale,
 φ_0 = Einfallswinkel.

Der Brechungsindex n ist eine Funktion der Elektronenkonzentration N und damit der Höhe in der Ionosphäre, aber auch eine Funktion vom Winkel α der Wellennormale gegen die Erdmagnetfeldrichtung. Für eine gegebene Einfallsebene kann man diesen Winkel α durch den Winkel gegen die Vertikale (φ) ausdrücken. Der Brechungsindex wird dann eine Funktion

$$n = n(N, \varphi);$$

und das Brechungsgesetz nimmt die Form an

$$n(N, \varphi) \cdot \sin \varphi = \sin \varphi_0. \quad (2)$$

Hieraus ist φ bei gegebenem Einfallswinkel φ_0 für beliebige Elektronenkonzentrationen N zu bestimmen. Das ist rechnerisch nicht ganz einfach, wie man nach Einsetzen des für n geltenden Ausdrucks [Gl. (3), S. 518] sieht.

Die Richtung der Wellennormale, die durch φ gegeben ist, ist noch nicht die gesuchte Strahlrichtung. Das elektrische Feld der Welle hat infolge des Erdmagnetfelds (so wie in jedem anisotropen Medium) eine Longitudinalkomponente. Der POYNTINGSche Vektor und die Strahlrichtung sind infolgedessen nicht senkrecht zur Wellenfläche. Man muß daher zur Wellennormalenrichtung in jedem Fall noch die Strahlrichtung bestimmen.

Setzt man dann die Strahlrichtungen, die man bei einer gegebenen Einfallsrichtung für verschiedene Höhen findet, zu einer Kurve zusammen, so erhält man den gesuchten Strahlweg.

Die theoretische Aufgabe ist hiernach, zunächst eine Übersicht zu bekommen über die Abhängigkeit des Brechungsindex von der Elektronenkonzentration bzw. der Höhe und von der Wellennormalenrichtung,

dann zu einer gegebenen Einfallrichtung für jede Höhe die Wellennormalenrichtung und die Strahlrichtung zu bestimmen. Zum Schluß müssen die Strahlrichtungen aneinandergereiht werden zum Strahlweg.

C. Voraussetzungen.

Die theoretischen Überlegungen, die hier durchgeführt werden, gründen sich auf die Strahlvorstellung. Diese ist brauchbar, wenn sich der Brechungsindex (mit ihm auch die Wellenlänge) und alle anderen Größen der Welle nur langsam ändern; die prozentuale Änderung auf die Entfernung einer Wellenlänge darf nur klein sein. Diese Bedingung ist für nicht zu dünne Ionosphärenschichten wie die *F*-Schicht im allgemeinen erfüllt außer in unmittelbarer Nähe der Reflexionsstelle¹.

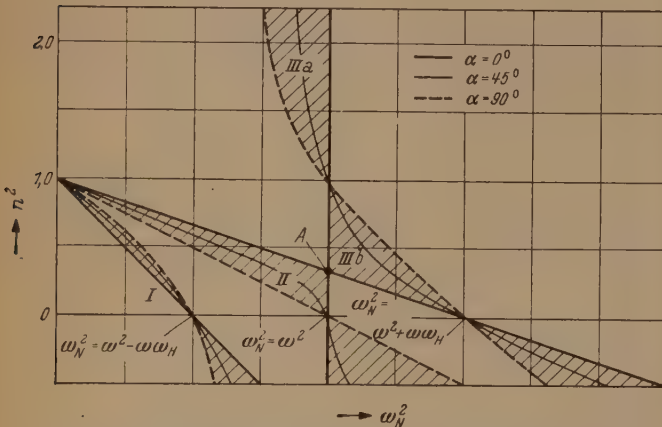


Abb. 1. Brechungsindex in Abhängigkeit von der Elektronenkonzentration. Wellenlänge 107 m. (Abszisse $\omega_N^2 = 3,18 \cdot 10^9 N$.)

Die Erdkrümmung wird im folgenden nicht berücksichtigt und die Ionosphäre als eben geschichtet angesehen. Die Absorption der Wellen in der Ionosphäre bleibt vernachlässigt.

Über die Abhängigkeit der Elektronenkonzentration von der Höhe ist vorläufig noch keine Voraussetzung gemacht (Beispiele, die man dafür wählen kann, s. Zusammenfassung am Ende der Arbeit).

Das Erdmagnetfeld sei: $H = 0,5$ Oe, Inklination 65° , Richtung von H zur Erde hin (ungefähre Daten für Süddeutschland). Die Gyrowellenlänge ist dann 214 m (Gyrofrequenz 1,40 MHz). Als Einfallsebene der Wellen wird hier die magnetische Meridianebene gewählt werden.

D. Brechungsindex. Ordentlicher und außerordentlicher Strahl.

Brechungsindex.

Die Theorie der Wellenausbreitung in der Ionosphäre liefert folgenden Ausdruck für den Brechungsindex [4], [5], [6], [7]²:

$$n^2 = 1 - \frac{\omega_N^2 / \omega^2}{1 - \frac{\omega_H^2 \sin^2 \alpha}{2(\omega^2 - \omega_N^2)} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_H^2 \sin^2 \alpha}{2(\omega^2 - \omega_N^2)} \right)^2 + \frac{\omega_H^2}{\omega^2} \cos^2 \alpha}}. \quad (3)$$

¹ Welche Folgen das Versagen der Strahltheorie an der Reflexionsstelle haben kann, wird in der nächsten Veröffentlichung angegeben werden.

² Hier sind die Formeln verwendet, die man ohne „LORENTZ-Term“ erhält. Siehe dazu [8].

Es bedeutet

$\omega_N^2 = 4\pi \frac{e^2}{m} N = 3,18 \cdot 10^9 N$ eine Größe, die proportional der Elektronenkonzentration N ist ($\omega_N / 2\pi =$ „Grenzfrequenz“),

$\omega_H = \frac{|e|}{mc} H = 1,759 \cdot 10^7 H$ die Gyro-Kreisfrequenz, die proportional der Erdmagnetfeldstärke H ist,

ω die Kreisfrequenz der Welle,

α den Winkel zwischen Wellennormale und Richtung der Erdmagnetfeldstärke,

$e = -4,80 \cdot 10^{-10}$ elektrostatische cgs-Einheiten die Elektronenladung (positiver Wert $|e|$),

m die Elektronenmasse ($e/m = -5,27 \cdot 10^{17}$ elektrostatische cgs-Einheiten),

$c = 3,00 \cdot 10^{10}$ cm/sec die Vakuumlichtgeschwindigkeit,

N die Zahl der Elektronen je cm^3 ,

H die erdmagnetische Feldstärke (angenommen zu 0,5 Oe).

In Abb. 1 (nach J. A. RATCLIFFE [5]) ist der Brechungsindex in Abhängigkeit von der Elektronenkonzentration N (genauer gesagt, von der Größe ω_N^2 , die proportional N ist) dargestellt, und zwar für eine Wellenlänge von etwa 100 m (das ist unterhalb der Gyrowellenlänge) und für verschiedene Winkel zwischen Wellennormale und Erdmagnetfeld (eingezeichnet sind die Kurven für $\alpha = 0^\circ$, 45° und 90°). Die Kurven für beliebige Richtung der Wellennormalen liegen alle innerhalb der schraffierten Flächen. Es interessiert stets nur das Gebiet oberhalb der Abszissenachse ($n^2 \geq 0$).

Man kann der Abbildung entnehmen, wie sich der Brechungsindex auf dem Weg eines vertikal in die Ionosphäre eintretenden Strahls ändert. Bei einem vertikal einfallenden Strahl bleibt ja der Winkel zwischen Wellennormale und Erdmagnetfeld (α) auf dem ganzen Weg konstant. Man durchläuft also eine bestimmte Kurve der Abb. 1, und zwar beginnend mit $\omega_N^2 = 0$ (beim Eintritt in die Ionosphäre), dann auf einem der möglichen Kurvenzweige weiter, bis der Brechungsindex Null wird ($n^2 = 0$); hier tritt Totalreflexion ein. Es gibt für jeden Wert des Winkels α zwei bei $\omega_N^2 = 0$ beginnende Kurvenzweige. Der eine (I) gehört zum außerordentlichen Strahl, der andere (II) zum ordentlichen Strahl. Der außerordentliche Strahl wird reflektiert ($n^2 = 0$) bei $\omega_N^2 = \omega^2 - \omega \omega_H$ und der ordentliche Strahl bei $\omega_N^2 = \omega^2$.

Der dritte Kurvenzweig und die dritte Reflexionshöhe.

In der graphischen Darstellung des Brechungsindex (Abb. 1) haben alle Kurven neben den beiden Zweigen I und II noch einen dritten Zweig (IIIa u. b). Dieser dritte Zweig spielt im allgemeinen keine Rolle; denn er beginnt nicht bei $\omega_N^2 = 0$ (das wäre am unteren Rand der Ionosphäre), sondern erst bei einem höheren ω_N^2 -Wert und es gibt daher normalerweise keine unten in die Ionosphäre eintretende Welle, für die die Werte dieses Kurvenzweigs gelten.

Ein einziger Punkt (A in Abb. 1) ist den beiden Flächen II und III gemeinsam. In diesem Punkt treffen sich die beiden Kurvenzweige II und III des Falls $\alpha = 0^\circ$. Diese beiden Kurvenzweige setzen sich aus Geradenstücken zusammen und haben im Punkt A einen Knick (s. Abb. 2, wo der Knick etwas abgerundet gezeichnet ist, damit die Zusammengehörigkeit der Geradenstücke deutlich wird). Die geneigte Gerade des Zweigs III (Abb. 2) ist die Fortsetzung

er geneigten Geraden des Zweigs II. Es ist daher denkbar, daß für den vertikal einfallenden ordentlichen Strahl in diesem Fall ($\alpha = 0^\circ$) nicht der geknickte Kurvenzweig II (Abb. 2) maßgebend ist, sondern daß vielleicht die geneigten Geradenstücke von II und III zu einer Geraden zusammenzusetzen sind, wie in Abb. 3 geschehen, und daß diese Gerade die Kurve für den ordentlichen Strahl des Falls $\alpha = 0^\circ$ darstellt. Der ordentliche Strahl würde dann nicht bei $\omega_N^2 = \omega^2$ reflektiert, sondern weiter aufsteigen und erst bei $\omega_N^2 = \omega^2 + \omega \omega_H$ reflektiert.

Die Entscheidung zwischen beiden Möglichkeiten läßt eine Stetigkeitsbetrachtung an der in Frage stehenden Stelle ($\omega_N^2 = \omega^2$). Die Ionosphäre ist als eben geschichtet angenommen. Die Ebenen, in denen die Elektronenkonzentration und damit die Bedingungen für die Wellenausbreitung konstant sind, sind horizontal. Daraus folgt, daß die Horizontalkomponenten der elektrischen und magnetischen Feldstärke überall stetig sein müssen, auch an der fraglichen Stelle ($\omega_N^2 = \omega^2$). Man muß demnach für diese Stelle die Polarisierung der Wellen¹ berechnen, und zwar die Polarisierung der aufsteigenden Welle, die Polarisierung der reflektierten absteigenden Welle, die Polarisierung der etwaigen inhomogenen Welle unmittelbar über der Reflexionsstelle und die Polarisierung der Welle, die dem Kurvenzweig III entsprechend weitergeht. Prüft man dann, ob an der fraglichen Stelle die Stetigkeitsbedingung erfüllbar ist, so findet man, daß dies bei Reflexion an dieser Stelle nicht der Fall ist. Dagegen bleibt die Stetigkeit gewahrt, wenn der Strahl nach Abb. 3 weiterläuft. Zum vertikal einfallenden ordentlichen Strahl gehört demnach bei longitudinale Erdmagnetfeld ($\alpha = 0^\circ$) die Gerade (Abb. 3) und nicht die geknickte Kurve der Abb. 2. Der Strahl wird daher im Falle longitudinalen Erdmagnetfelds (Magnetpol der Erde) bei $\omega_N^2 = \omega^2 + \omega \omega_H$ reflektiert und nicht, wie sonst, bei $\omega_N^2 = \omega^2$.

Wenn man die Stoßdämpfung der Elektronen in der Ionosphäre berücksichtigt, findet man, daß diese ungewöhnliche Reflexionshöhe des ordentlichen Strahls nicht nur genau bei $\alpha = 0^\circ$ eintritt, sondern auch noch in einem gewissen kleinen Bereich des Winkels α um 0° herum². Der Bereich ist um so größer, je größer die Stoßzahl (ν) ist. Die Grenze des Bereichs ist ungefähr gegeben durch die Beziehung².

$$2 \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \frac{\nu}{\omega_H} \approx 1.$$

Aber auch, wenn die Stoßdämpfung zu vernachlässigen ist, ist nicht zu erwarten, daß schon bei kleinsten Winkeln α , nur wenig über 0° , der vertikal einfallende ordentliche Strahl, wie sonst üblich, bei $\omega_N^2 = \omega^2$ reflektiert wird. Es zeigt sich nämlich, daß bei kleinen Winkeln α in der Nähe der Reflexionsstelle

¹ Die Formeln zur Berechnung der Polarisierung und der Longitudinalkomponente sind zu finden in [2], [4], [7].

² Dieser Sonderfall wird manchmal als „longitudinaler Typ der Wellenausbreitung“ bezeichnet (im Gegensatz dazu der reguläre Fall als „transversaler Typ“). Er ergibt sich aus der Theorie nicht nur durch Stetigkeitsbetrachtungen wie hier, sondern auch, indem man zunächst Stoßdämpfung annimmt, die man dann nachträglich als verschwindend klein ansehen kann (s. den nächsten Absatz).

³ [9], [10], [11], [12], [13].

Z. f. angew. Physik. Bd. 1.

die Strahlvorstellung unbrauchbar wird³. Man muß dann annehmen, daß der ordentliche Strahl in der Gegend $\omega_N^2 = \omega^2$ aufgespalten wird in 2 Teile, von denen der eine bei $\omega_N^2 = \omega^2$ reflektiert wird und der andere aufsteigt bis $\omega_N^2 = \omega^2 + \omega \omega_H$. Der letztere Teil wird bei kleinem Winkel α überwiegen (um so mehr, je kleiner α ; bei $\alpha = 0^\circ$ ist er allein noch vorhanden). Geht man zu immer größeren Winkeln α über, so überwiegt immer mehr der erstere Teil, bis er schließlich allein vorhanden ist. Bei steiler Richtung des Erdmagnetfelds wird demnach der ordentliche Vertikalstrahl in 2 Komponenten aufgespalten. Es gibt dann 3 Reflexionshöhen (Abb. 1):

$$\omega_N^2 = \omega^2 - \omega \omega_H \text{ (außerordentlicher Strahl),}$$

$$\omega_N^2 = \omega^2 \text{ (ordentlicher Strahl),}$$

$$\omega_N^2 = \omega^2 + \omega \omega_H \text{ (ordentlicher Strahl)}^4.$$

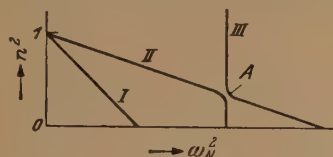


Abb. 2. Nach Abb. 1 mögliche Kurven für $\alpha = 0^\circ$.

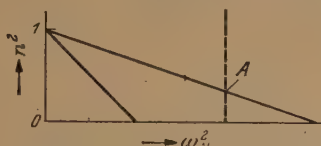


Abb. 3. Nach Abb. 1 mögliche Kurven für $\alpha = 0^\circ$ (Gerade).

In hoher geographischer Breite werden oft wirklich 3 Reflexionshöhen in den Ionosphärenregistrierungen beobachtet [13], [14]. Daß die dritte Reflexionshöhe auch bei nicht genau vertikalem Erdmagnetfeld auftritt, führt S. L. SEATON auf die Stoßdämpfung zurück (ähnlich wie vorhin besprochen). Nach den letzten Darlegungen ist das aber auch ohne wesentlichen Einfluß der Stoßdämpfung verständlich.

Wellenlängen über der Gyrowellenlänge.

Abb. 4 (nach [5]) stellt den Brechungsindex für eine Wellenlänge, die größer ist als die Gyrowellenlänge. In diesem Fall wird der außerordentliche Strahl (IIa und b) in größerer Höhe reflektiert als der ordentliche (I). Auch hier gibt es dritte Kurvenzweige (III), aber nur für Winkel α unterhalb eines gewissen Grenzwinkels. Für longitudinales Magnetfeld ($\alpha = 0^\circ$) ergeben sich ähnlich wie bei kurzen Wellenlängen besondere Verhältnisse. Jetzt sind es 2 Punkte, die verschiedenen Scharen von Kurvenzweigen gemeinsam sind, nämlich die Punkte A und B (Abb. 4). Aus Betrachtungen wie oben folgt hier: Der vertikal einfallende ordentliche Strahl wird bei longitudinale Magnetfeld in der Höhe reflektiert, in der sonst der außerordentliche reflektiert wird (geneigte Gerade durch Punkt A, Abb. 4). Der vertikal einfallende

³ Das kommt daher, daß die Strahlrichtung in der Nähe von $\omega_N^2 = \omega^2$ sich sehr rasch ändern sollte (um so rascher, je kleiner α).

⁴ Diese Reflexionsbedingung ist normalerweise die des außerordentlichen Vertikalstrahls bei Wellenlängen über der Gyrowellenlänge. Wenn der ordentliche Strahl so weit vordringt, kann man ihn nach der auf S. 520 gegebenen Definition nur im unteren Teil seiner Bahn noch als ordentlichen Strahl bezeichnen.

außerordentliche Strahl geht bei longitudinalem Magnetfeld durch die ganze Schicht hindurch, ohne reflektiert zu werden, unabhängig davon, welche maximale Elektronenkonzentration in der Schicht erreicht wird (aufsteigende Gerade durch Punkt B, Abb. 4). In Wirklichkeit wird allerdings die Absorption unterwegs vielleicht so stark werden, daß sich der Strahl totläuft.

Definition des ordentlichen und des außerordentlichen Strahls.

Die Bezeichnungen „ordentlicher“ und „außerordentlicher Strahl“ haben bei Radiowellen nicht den

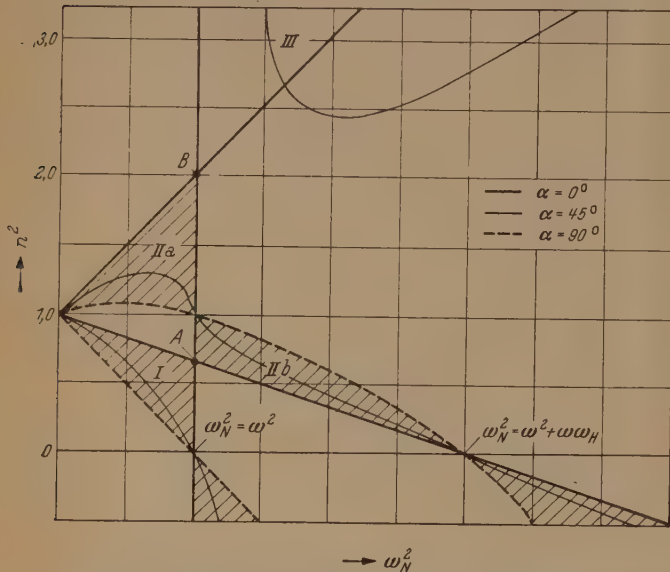


Abb. 4. Brechungsindex in Abhängigkeit von der Elektronenkonzentration. Wellenlänge 430 m. (Abszisse $\omega_N^2 = 3,18 \cdot 10^9 \text{ N.}^2$)¹

Sinn wie in der Kristalloptik. Es ist üblich, als ordentlichen Strahl den zu bezeichnen, der bei senkrechtem Einfall in die Ionosphäre in der gleichen Höhe reflektiert wird, wie wenn kein Erdmagnetfeld vorhanden wäre. Für diesen ist dann bei transversalem Erdmagnetfeld ($\alpha = 90^\circ$) auch der Brechungsindex der gleiche wie ohne Erdmagnetfeld.

Welche Werte von n in Formel (3) sind nun die des ordentlichen Strahls und welche die des außerordentlichen Strahls? Die Antwort darauf erhält man, wenn man feststellt, welches Wurzelvorzeichen in (3) zu den einzelnen Kurvenzweigen der Abb. 1 und 4 gehört. In Abb. 1 ist das Wurzelvorzeichen positiv für II und IIIb, negativ für I und IIIa; in Abb. 4 positiv für I und IIb, negativ für IIa und III. In Abb. 1 stellt I den außerordentlichen Strahl dar, II den ordentlichen; in Abb. 4 I den ordentlichen, IIa und b den außerordentlichen. Daraus folgt:

Für $\omega_N^2 < \omega^2$ gehört das positive Wurzelvorzeichen in (3) zum ordentlichen Strahl, das negative zum außerordentlichen. Für $\omega_N^2 > \omega^2$ ist es umgekehrt. Diese Vorzeichenregel kann man zur Definition des ordentlichen und des außerordentlichen Strahls verwenden.

Daß die Vorzeichen für $\omega_N^2 > \omega^2$ umgekehrt gewählt werden müssen, wird im allgemeinen nicht beachtet. Es muß aber so sein, damit man für Wellen-

längen über der Gyrowellenlänge (Abb. 4) den außerordentlichen Strahl, der ja bei diesen Wellenlängen in den Bereich $\omega_N^2 > \omega^2$ vordringt, auch in diesen Bereich wirklich als außerordentlichen Strahl bekommt.

Der vertikal einfallende ordentliche Strahl wird bei $\omega_N^2 = \omega^2$ reflektiert. Im Bereich $\omega_N^2 > \omega^2$ gibt es daher keinen reellen ordentlichen Strahl. Durch die Vorzeichenfestsetzung erhält man in diesem Bereich als „ordentlichen Strahl“ tatsächlich keine reelle Lösung, sondern eine komplexe, und zwar ganz richtig die inhomogene abklingende Welle, die über der Reflexionsstelle des ordentlichen Strahls entsteht.

Durch die Vorzeichenfestsetzung wird auch der Kurvenzweigen III (Abb. 1 und 4) eine Bezeichnung — ordentlich oder außerordentlich — beigelegt. Es empfiehlt sich aber, bei diesen Kurvenzweigen, die ja nur in Sonderfällen in Erscheinung treten, von der Bezeichnung abzusehen.

E. Graphisches Verfahren zur Anwendung des Brechungsgesetzes und zur Ermittlung des Strahlwegs

Anwendung des Brechungsgesetzes.

Will man ein Bild davon gewinnen, wie der Brechungsindex bei einer bestimmten Elektronenkonzentration von der Richtung der Wellennormale abhängt, so stellt man zweckmäßigerweise den Brechungsindex in Abhängigkeit von der Normalenrichtung in räumlichen Polarkoordinaten graphisch dar. Man erhält dann, wenn man alle Richtungen im Raum nimmt, eine Fläche, die n -Fläche genannt werden soll. Beschränkt man sich auf die Richtungen in einer Einfallsebene, so erhält man eine ebene Kurve, die $n(\varphi)$ -Kurve für die Einfallsebene.

Mittels der n -Fläche oder $n(\varphi)$ -Kurve kann man graphisch die Lösung des Brechungsgesetzes (2) finden, d. h. die Richtung der Wellennormale (Winkel φ) zu einem gegebenen Einfallswinkel φ_0 bestimmen. Man muß zur n -Fläche oder $n(\varphi)$ -Kurve nur noch eine vertikale Gerade im Abstand $\sin \varphi_0$ vom Ursprungspunkt zeichnen [s. Abb. 5, die mehrere $n(\varphi)$ -Kurven zeigt]. Bei räumlicher Darstellung muß die Gerade in der durch den Ursprungspunkt gelegten Einfallsebene liegen. Die Schnittpunkte der Geraden mit der n -Fläche oder $n(\varphi)$ -Kurve sind die Lösungen des Brechungsgesetzes, wie leicht abzuleiten ist [2]. Der Radiusvektor zu den Schnittpunkten hat also die gesuchte Richtung der Wellennormalen. Dieses Verfahren ist in der Kristalloptik schon sehr lange bekannt [15], [16], [17].

Strahlrichtung.

Auch die Strahlrichtung kann man graphisch erhalten. Die Strahlrichtung zu einem Punkt der n -Fläche ist die Flächennormale in dem betreffenden Punkt. Dieses Gesetz wurde in der Kristalloptik ebenfalls schon in alter Zeit gefunden [15], [16], [17] und ist in der ersten Mitteilung [2] nochmals abgeleitet.

Häufig genügt es, wenn man die Projektion der Strahlrichtung in die Einfallsebene der Welle kennt. Diese ist die Normale zur $n(\varphi)$ -Kurve der Einfallsebene. Der Richtungssinn der Strahlrichtung ist stets so anzunehmen, daß Strahlrichtung und Wellennormale einen spitzen Winkel, höchstens einen rechten Winkel miteinander bilden.

¹ Berichtigung: Kurvenzweig III für $\alpha = 45^\circ$ ist falsch angegeben. Alle Kurvenzweige III liegen zwischen den beiden Geraden, die sich in B schneiden.

Strahlweg.

Hat man sich für eine der beiden möglichen Strahlkomponenten (ordentliche oder außerordentliche) sowie für eine bestimmte Einfallsebene entschieden, so erhält man einen ganzen Strahlweg auf folgende Art: Man zeichnet für den gewählten Fall die $n(\varphi)$ -Kurven zu allen möglichen Werten der Elektronenkonzentration N . Dann trägt man in das Kurvenbild eine vertikale Gerade im Abstand $\sin \varphi_0$ vom Ursprungspunkt ($\varphi_0 =$ Einfallswinkel) ein (Abb. 5). In den Schnittpunkten der Geraden mit den $n(\varphi)$ -Kurven ermittelt man die Kurvennormalenrichtungen. Diese sind jeweils die Projektion der Strahlrichtung in die Einfallsebene. Im allgemeinen wird eine $n(\varphi)$ -Kurve zweimal geschnitten. In einen Schnittpunkt ist die Strahlrichtung (Kurvennormale) aufsteigend, in anderen absteigend.

Man setzt jetzt die gefundenen Projektionen der Strahlrichtungen als Polygonzug aneinander, zuerst die aufsteigenden Richtungen, dann die absteigenden, und immer so, daß in einem maßstäblichen Bild der Ionosphäre jedes Geradenstück in die richtige Höhe kommt. Man muß dazu die Abhängigkeit der Elektronenkonzentration von der Höhe kennen. Wo die Strahlrichtung horizontal wird (das ist an der Reflexionsstelle zu erwarten), versagt das Zusammensetzverfahren, da man nicht weiß, wie lang das horizontale Geradenstück zu nehmen ist. An dieser Stelle muß man statt der Geraden eine Näherung zweiten Grades für den Strahlweg einführen. Aber auch diese Näherung läßt sich aus der graphischen Darstellung gewinnen. Zum Schluß ersetzt man den Polygonzug durch eine stetig gekrümmte Kurve. Diese ist die Projektion des Strahlwegs in die Einfallsebene.

Ist die Einfallsebene die magnetische Meridianebene, so bleibt der Strahl auf dem ganzen Weg in der Einfallsebene. In allen anderen Fällen kann man noch nachträglich ermitteln, wie weit der Strahl im Lauf seines Wegs aus der Einfallsebene heraustritt. Man muß sich hierzu die $n(\varphi)$ -Kurven zu n -Flächen ergänzt denken — das sind Rotationsflächen mit der Magnetfeldrichtung als Achse — und dann die Komponente der Strahlrichtung (Flächennormale) senkrecht zur Einfallsebene bestimmen.

Wenn man sich für die Richtung der Wellennormalen und für den Wert des Brechungsindex interessiert (etwa um die Polarisation der Welle zu errechnen), so kann man diese für jeden Schnittpunkt in der graphischen Darstellung auch ohne weiteres ablesen.

Reflexion.

Der graphischen Darstellung (Abb. 5) läßt sich leicht die Elektronenkonzentration entnehmen, bei welcher der Strahl reflektiert wird. An der Reflexionsstelle geht der Strahlweg von aufsteigender Richtung in absteigende Richtung über. Unterhalb der Reflexionshöhe gibt es daher in jeder Höhe 2 Strahlrichtungen, eine aufsteigende und eine absteigende; oberhalb der Reflexionshöhe gibt es keinen Strahl. In Abb. 5 gehören demnach die $n(\varphi)$ -Kurven, die zweimal von der vertikalen Geraden getroffen werden, zu Höhen unterhalb der Reflexionshöhe, diejenigen, die nicht getroffen werden, zu Höhen über der Reflexions-

höhe. Die letzte von der vertikalen Geraden erreichte $n(\varphi)$ -Kurve (in Abb. 5 $\omega_N^2 = 0,9 \omega^2$) ist die, bei der Reflexion eintritt.

In dem in Abb. 5 eingezeichneten Fall wird die letzte erreichte $n(\varphi)$ -Kurve von der vertikalen Geraden berührt. Die Kurvennormale im Berührungspunkt ist horizontal. Das bedeutet, daß die Strahlrichtung bei der Reflexion horizontal ist, wie man es erwartet. Meist ist es so; aber es gibt noch eine andere Möglichkeit: Für kleine Einfallswinkel (φ_0) in der magnetischen Meridianebene liegt die vertikale Gerade in Abb. 5 nahe beim Koordinatenursprung. Sie trifft dann als letzte $n(\varphi)$ -Kurve die zu einer

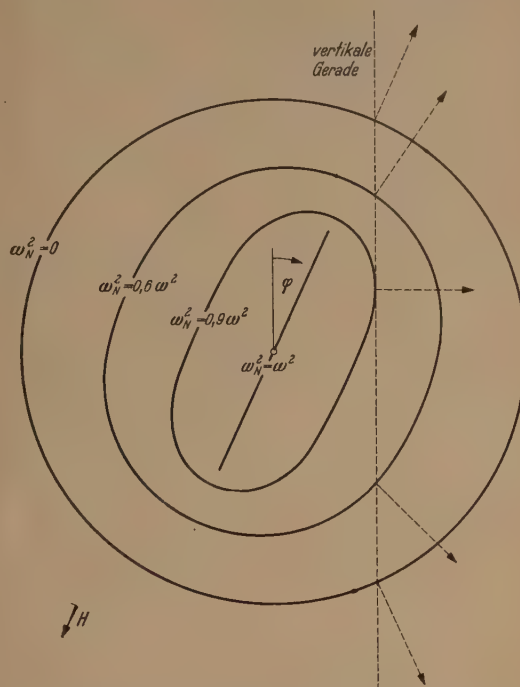


Abb. 5. Brechungsindex in Abhängigkeit von der Richtung der Wellennormalen, $n(\varphi)$. Wellenlänge 80 m. Ordentlicher Strahl.

Maßstab: $n = 1$ für $\omega_N^2 = 0$. Eingezeichnet: eine vertikale Gerade, in den Schnittpunkten die Kurvennormalen.

Geraden entartete ($\omega_N^2 = \omega^2$). Sie berührt diese nicht, sondern schneidet sie. Die Strahlrichtung (Kurvennormale) an der Reflexionsstelle ist dann nicht horizontal, sondern senkrecht zu der entarteten $n(\varphi)$ -Kurve, das ist senkrecht zur Erdmagnetfeldrichtung. Sie kehrt dabei plötzlich von aufsteigender Richtung in die entgegengesetzte absteigende Richtung um; der Strahlweg hat an der Reflexionsstelle eine Spitze.

Es gibt demnach 2 Arten von Strahlwegen: solche, die überall stetig gekrümmt verlaufen und an der Reflexionsstelle, wie zu erwarten, horizontal werden, und solche mit Spitze an der Reflexionsstelle. Beispiele dafür bringt die erste Mitteilung [2] und die demnächst erscheinende dritte Mitteilung.

F. Graphische Darstellung des Brechungsindex in Abhängigkeit von der Wellennormalenrichtung.

Es sollen einige graphische Darstellungen des Brechungsindex in Abhängigkeit von der Wellennormalenrichtung (Winkel φ) gezeigt werden, wie

man sie für das graphische Verfahren benötigt [$n(\varphi)$ -Kurven]¹. Aus den graphischen Darstellungen kann man sofort verschiedenes über die Strahlwege, vor

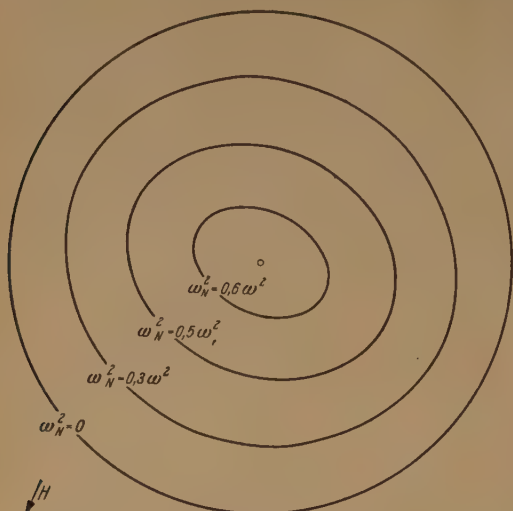


Abb. 6. Brechungsindex in Abhängigkeit von der Richtung der Wellennormalen, $n(\varphi)$. Wellenlänge 80 m. Außerordentlicher Strahl. Maßstab: $n = 1$ für $\omega_N^2 = 0$. Der Mittelpunkt stellt die Kurve für $\omega_N^2 = \omega^2 - \omega_H^2 = 0,626 \omega^2$ dar.

allen über das Verhalten bei der Reflexion herauslesen.

Als Wellenlänge ist zunächst (Abb. 5–7) 80 m (3,75 MHz), also eine Wellenlänge unterhalb der



Abb. 7. Brechungsindex in Abhängigkeit von der Richtung der Wellennormalen, $n(\varphi)$. Wellenlänge 80 m. Dritte Kurvenschar. Maßstab: $n = 1$ für den Kreis ($\omega_N^2 = \omega^2$). Die Zahlen an den Kurven bedeuten die Werte von ω_N^2/ω^2 . Der Mittelpunkt stellt die Kurve für $\omega_N^2 = \omega^2 + \omega_H^2 = 1,374 \omega^2$ dar.

Gyrowellenlänge gewählt, als Einfallsebene immer die magnetische Meridianebene.

Es sind 3 Scharen von $n(\varphi)$ -Kurven darzustellen: eine Schar für den ordentlichen Strahl (Abb. 5, ent-

spricht den Kurvenzweigen II der Abb. 1), eine Schar für den außerordentlichen Strahl (Abb. 6, entspricht den Kurvenzweigen I der Abb. 1) und eine dritte Schar entsprechend den dritten Kurvenzweigen (III) der Abb. 1.

Ohne Erdmagnetfeld wären die $n(\varphi)$ -Kurven konzentrische Kreise. Bei Vorhandensein eines Erdmagnetfeldes ist nur noch die Kurve der Elektronenkonzentration Null ein Kreis (mit dem Radius 1).

Die Kurven des ordentlichen Strahls schrumpfen für $\omega_N^2 \rightarrow \omega^2$ zu einer geraden Linie zusammen. Diese führt, wie im vorigen Abschnitt gezeigt, zu den eigentlichen Strahlwegen mit Spitze an der Reflexionsstelle, die bei steilen Einfallsrichtungen in der magnetischen Meridianebene auftreten (bei den gewählten Daten bis zu den Einfallswinkeln $12,7^\circ$ N und S). Die Reflexionshöhe dieser Strahlen mit Spitze ist unabhängig vom Wert des Einfallswinkels. Sie ist wie die des vertikal einfallenden Strahls gegeben durch die Bedingung $\omega_N^2 = \omega^2$; denn die vertikale Gerade im graphischen Verfahren erreicht ja die entartete $n(\varphi)$ -Kurve, die zu $\omega_N^2 = \omega^2$ gehört.

Die Kurven des außerordentlichen Strahls schrumpfen für wachsendes ω_N^2 zu einem Punkt zusammen. Beim außerordentlichen Strahl gibt es infolgedessen keine Strahlwege mit Spitze. Die $n(\varphi)$ -Kurve wird ein Punkt für $\omega_N^2 = \omega^2 - \omega_H^2$. Dies ist der größtmögliche Wert ω_N^2 für den außerordentlichen Strahl. Bei diesem Wert wird der vertikal einfallende Strahl reflektiert.

Dritte Kurvenschar. Ein besonderer Strahlweg.

Zur dritten Schar von $n(\varphi)$ -Kurven (Abb. 7), die den dritten Kurvenzweigen von Abb. 1 entspricht, gibt es im allgemeinen keine wirklichen Strahlwege, da die Schar (ebenso wie die dritten Kurvenzweige der Abb. 1) nicht bei $\omega_N^2 = 0$, sondern erst bei einem größeren ω_N^2 -Wert einsetzt (nämlich bei $\omega_N^2 = \omega^2 - \omega_H^2 = 0,86 \omega^2$).

Man muß aber noch untersuchen, ob nicht ein Strahl im Lauf seines Wegs verschiedenen $n(\varphi)$ -Kurvenscharen angehören kann, ob also ein Übergang von einer Kurvenschar zu einer anderen möglich ist. Dieser Übergang kann nur eintreten, wenn an der Übergangsstelle die beiden $n(\varphi)$ -Kurvenscharen die gleichen Werte für n und φ ergeben. Andernfalls müßte die Polarisation der Welle unstetig sein. Gleiche Werte für n und φ an einer Stelle erhält man aus beiden Kurvenscharen, wenn $n(\varphi)$ -Kurven der beiden Scharen, die zur gleichen Elektronenkonzentration gehören, sich in einem Punkt (n, φ) treffen. Die Frage ist also: Gibt es solche Punkte, in denen sich zur gleichen Elektronenkonzentration gehörende Kurven zweier Kurvenscharen treffen?

Es gibt zwei derartige Punkte: A_1 und A_2 in Abb. 7². Diese Punkte sind zugleich die Endpunkte der zur Geraden entarteten Kurve von Abb. 5. Sie entsprechen dem Punkt A in Abb. 1. Die Einfallrichtung für diese Punkte (gegeben durch die vertikalen Geraden, die durch die Punkte gehen) ist $12,7^\circ$ S und $12,7^\circ$ N. Es handelt sich gerade um den Grenzfall des ordentlichen Strahls zwischen den Strahlen

¹ In den Abbildungen sind nur wenige Kurven dargestellt. Für das graphische Verfahren ist ein dichteres System von Kurven erforderlich; es müssen die Kurven für mehr Werte von ω_N^2 gezeichnet werden.

² A_1 und A_2 gehören zur Kurve für $\omega_N^2 = \omega^2$ der Abb. 7. Diese Kurve besteht aus einem Kreis und den beiden Geraden, die von A_1 und A_2 ins Unendliche gehen.

mit Spitze und den Strahlen mit Horizontaltangente an der Reflexionsstelle.

In diesem Sonderfall kann man sich hiernach Möglichkeiten denken, ähnlich wie beim vertikal einfallenden ordentlichen Strahl im longitudinalen Erdmagnetfeld (S. 519): Entweder wird der Strahl bei $\omega_N^2 = \omega^2$ reflektiert¹ oder er steigt weiter auf und folgt der dritten Kurvenschar (Abb. 7). Die Entscheidung zwischen den beiden Möglichkeiten kann man auch hier mittels der Stetigkeitsbedingung der Feldstärken treffen (Longitudinalkomponente der elektrischen Feldstärke ist wesentlich). Auch hier findet man, daß in dem Sonderfall der Strahl weiter aufsteigt, der dritten Kurvenschar (Abb. 7) folgend, und noch nicht bei $\omega_N^2 = \omega^2$ reflektiert wird.

Abb. 7 ergibt dann (mittels des graphischen Verfahrens), daß der Strahl im Fall $12,7^\circ$ S erst fast bei $\omega_N^2 = \omega^2 + \omega \omega_H$ reflektiert wird und daß er beim Absteigen dicht unterhalb $\omega_N^2 = \omega^2$ horizontal wird und horizontal weiterläuft, also nicht mehr weiter ab- oder aufsteigt.

Der Brechungsindex wird auf dem horizontalen Weg ∞ . Die Absorption des Strahls kann hier nicht mehr vernachlässigt werden. Berücksichtigt man die Stoßdämpfung (Formeln in [4], [5], [6], [7]), so sieht man, daß hier zugleich mit dem Brechungsindex auch der Absorptionskoeffizient sehr groß wird, auch dann, wenn er in den übrigen Gebieten zu vernachlässigen ist². Es ist daher zu erwarten, daß der Strahl völlig absorbiert wird und nicht mehr zur Erde zurückkehrt.

Im Fall $12,7^\circ$ N wird die Strahltheorie unbrauchbar, da sich die Strahlrichtung in der Umgebung von $\omega_N^2 = \omega^2$ sehr rasch ändern sollte. Der Strahl wird vermutlich in 2 Teile aufgespalten, von denen einer nach Abb. 7 ein wenig über $\omega_N^2 = \omega^2$ reflektiert wird und beim Absteigen horizontal ausläuft und völlig absorbiert wird. Der zweite Teil muß entsprechend Abb. 5 bei $\omega_N^2 = \omega^2$ reflektiert werden und ganz regulär herabkommen.

Der ordentliche Strahl $12,7^\circ$ S dringt demnach als einziger in besonders große Höhe vor, in größere Höhe als der vertikal einfallende Strahl, fast bis $\omega_N^2 = \omega^2 + \omega \omega_H$. Er ist vergleichbar mit dem vertikal einfallenden Strahl bei longitudinalem Erdmagnetfeld.

Die Einfallrichtung des Sonderfalls (Grenzfall zwischen Strahlen mit Spitze und Strahlen mit Horizontaltangente an der Reflexionsstelle) ist nur bei den speziellen zugrunde gelegten Daten (Wellenlänge, Inklination, Magnetfeldstärke) $12,7^\circ$ S. Die Richtung liegt aber immer zwischen der Vertikalen und der Erdmagnetfeldrichtung (im vorliegenden Beispiel ziemlich genau in der Mitte dieses Bereichs)³. Bei kurzen Wellen nähert sie sich der Vertikalen, bei

langen Wellen der Erdmagnetfeldrichtung. Der Einfallswinkel läßt sich in jedem Fall aus Länge und Lage der zur Geraden entarteten $n(\varphi)$ -Kurve (Abb. 5) ableiten. Sowohl in dem Sonderfall als auch bei den Strahlen mit Spitze hat die Wellennormale bei $\omega_N^2 = \omega^2$ die Richtung des Erdmagnetfelds; das Erdmagnetfeld ist hier also longitudinal. Es ist daher verständlich, daß etwas ähnliches eintreten kann wie bei vertikal einfallenden Strahlen im longitudinalen Erdmagnetfeld.

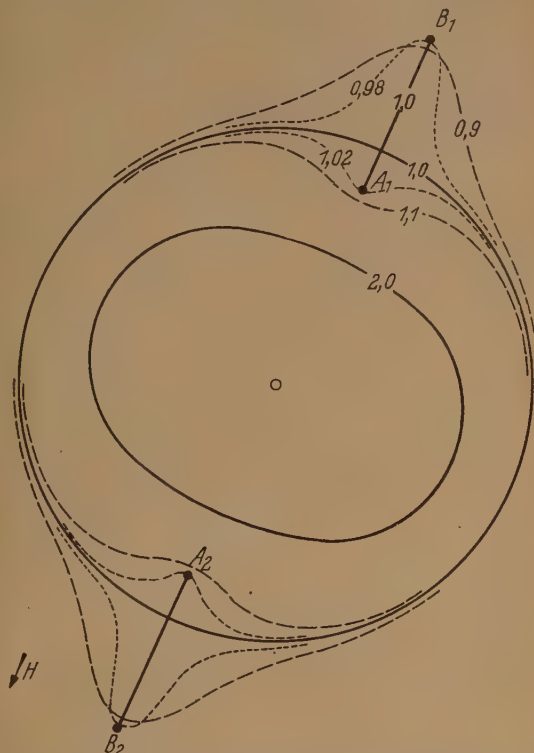


Abb. 8. Brechungsindex in Abhängigkeit von der Richtung der Wellennormalen, $n(\varphi)$. Wellenlänge 400 m. Außerordentlicher Strahl. Maßstab: $n = 1$ für den Kreis ($\omega_N^2 = \omega^2$). Die Zahlen an den Kurven bedeuten die Werte von ω_N^2/ω^2 .

Wellenlängen über der Gyrowellenlänge.

Der ordentliche Strahl verhält sich oberhalb der Gyrowellenlänge ebenso wie unterhalb.

Der außerordentliche Strahl wird unterhalb der Gyrowellenlänge in geringerer Höhe reflektiert als der ordentliche, oberhalb der Gyrowellenlänge dagegen in größerer Höhe als der ordentliche. Sein Strahlweg kann oberhalb der Gyrowellenlänge einen komplizierten Verlauf haben. Dies kommt in den $n(\varphi)$ -Kurven der magnetischen Meridianebene unmittelbar zum Ausdruck (einige sind dargestellt in Abb. 8). Manche $n(\varphi)$ -Kurve, in der Nähe von $\omega_N^2 = \omega^2$, kann von einer vertikalen Geraden viermal geschnitten werden. Das bedeutet, daß der außerordentliche Strahl zu der betreffenden Elektronenkonzentration viermal gelangt: aufsteigend, absteigend, nochmals aufsteigend und nochmals absteigend. Der Strahlweg hat in diesem Fall 2 Maxima und 1 Minimum. Daß es solche Strahlwege gibt, fand schon H. G. BOOKER [1]. Ein Maximum und das Minimum befinden sich beide in der Nähe von $\omega_N^2 = \omega^2$; denn nur in der Nähe

¹ Die Strahlrichtung bei $\omega_N^2 = \omega^2$ läßt sich in dem Sonderfall nicht ohne weiteres der graphischen Darstellung entnehmen; denn die Kurvennormale in den Endpunkten der zur Geraden entarteten $n(\varphi)$ -Kurve ist unbestimmt. Es ist eine kleine mathematische Überlegung mit einem Grenzübergang erforderlich. Man findet dabei, daß der Strahl, falls Reflexion bei $\omega_N^2 = \omega^2$ eintritt, hier weder eine Spitze, noch Horizontaltangente hat, sondern einen Knick.

² Siehe dazu [6] S. 174.

³ Daneben gibt es immer noch einen weniger ausgeprägten Sonderfall bei dem gleichen Winkel, jedoch in nördlicher Richtung statt in südlicher (s. oben Fall $12,7^\circ$ N).

* Dieses Maximum oder das Minimum kann eine Reflexionsstelle mit Spitze sein, während die anderen Reflexionsstellen stets Horizontaltangente haben.

von $\omega_N^2 = \omega^2$ sind 4 Lösungen möglich. Dieses Maximum und das Minimum treten daher wohl nicht besonders in Erscheinung; der Strahlweg scheint lediglich etwas länger in der Gegend $\omega_N^2 = \omega^2$ zu verweilen, während sein eigentliches Maximum (eigentliche Reflexionsstelle) höher liegt.

Bei Wellenlängen über der Gyrowellenlänge gibt es mehrere Punkte, die verschiedenen Kurvenscharen gemeinsam sind, genauer gesagt, die gleichzeitig auf zwei zur gleichen Elektronenkonzentration gehörenden Kurven verschiedener Kurvenscharen liegen. Es sind dies in Abb. 8 die Endpunkte der Geradenstücke (für $\omega_N^2 = \omega^2$) A_1, A_2 (entsprechend Punkt A in Abb. 4) und B_1, B_2 (entsprechend Punkt B in Abb. 4). Vermutlich geht der Strahl in manchen Fällen wirklich von der einen Kurvenschar zur anderen Kurvenschar über. Dann ergeben sich ähnliche Erscheinungen wie bei vertikal einfallendem Strahl und longitudinalem Erdmagnetfeld: Der ordentliche Strahl einer bestimmten Richtung (bei 400 m Wellenlänge 20° S^1) wird unterwegs zum außerordentlichen Strahl (Punkt A_1); er wird in der Reflexionshöhe des außerordentlichen Strahls reflektiert werden und auch als außerordentlicher Strahl herabkommen. Aber auch der außerordentliche Strahl kann unterwegs zum ordentlichen Strahl werden. In einem anderen Fall (bei 400 m Wellenlänge Richtung 38° S) wird der außerordentliche Strahl die ganze Schicht durchsetzen, ohne jemals reflektiert zu werden. Um zu entscheiden, ob dies alles wirklich eintritt, müßte man wieder die Stetigkeitsbedingung der Feldstärken an den fraglichen Stellen (Punkte A_1, A_2, B_1, B_2) betrachten und auch prüfen, ob die Strahltheorie noch brauchbar ist.

G. Anzahl der Lösungen.

Wie viele Lösungen ergibt das Brechungsgesetz (2) zusammen mit der Formel des Brechungsindex (3) für eine gegebene Einfallrichtung und eine bestimmte Elektronenkonzentration? Aus den Beziehungen (2) und (3)² erhält man eine Gleichung zur Bestimmung von n und φ . Diese ist eine Gleichung vierten Grads in n und in $\sin \varphi$. Sie hat demnach 4 Lösungen ($n, \sin \varphi$). Die Lösungen können alle reell sein, es können 2 Lösungen reell und 2 komplex sein, oder alle Lösungen können komplex sein. Komplexe Lösungen stellen keine fortschreitende Welle dar, sondern eine inhomogene abklingende Welle, wie sie bei Totalreflexion über der Reflexionsstelle auftritt.

Hat man für gewisse Bedingungen mittels des graphischen Verfahrens 4 Lösungen gefunden (z. B. ordentlicher Strahl aufsteigend und absteigend, außerordentlicher Strahl aufsteigend und absteigend), so sind dies sicher alle Lösungen. Es kann dann bei den betreffenden Bedingungen außer diesen Lösungen keine weiteren mehr geben, auch keine inhomogene abklingende Welle.

In manchen Fällen lassen sich hieraus bereits Schlüsse für die Strahlwege ziehen. Als Beispiel sei der ordentliche Strahl angeführt für die Richtungen, die der speziellen Richtung $12,7^\circ \text{ S}$ benachbart sind.

¹ Dies ist jetzt der Grenzwinkel zwischen den Strahlwegen mit Spitze und denen mit Horizontaltangente an der Reflexionsstelle.

² Man braucht dazu noch die Beziehung zwischen φ und α für die gegebene Einfallsebene.

Oben (S. 523) wurde abgeleitet, daß der ordentliche Strahl der Einfallrichtung $12,7^\circ \text{ S}$ (bei den gewählten Daten) in größerer Höhe reflektiert wird als die Strahlen aller anderen Richtungen. Für die Richtungen, die $12,7^\circ \text{ S}$ benachbart sind, findet man durch Betrachtung der Anzahl der Lösungen, daß oberhalb der Reflexionsstelle nur in einer dünnen Schicht eine inhomogene abklingende Welle möglich ist. Über dieser Schicht kann es nur fortschreiten (Wellen geben (man findet da vier reelle Lösungen)). Wenn die Schicht der inhomogenen Welle sehr dünn ist, ist am Oberrand der Schicht die inhomogene Welle noch nicht abgeklungen; über der Schicht entsteht dann wieder eine fortschreitende Welle. Das bedeutet, daß die Reflexion an der zu erwartenden Reflexionsstelle nicht total ist, sondern partiell. Ein Teil des Strahls steigt nach Durchdringen der dünnen Schicht, in der sich eine inhomogene Welle ausbreitet, weiter auf und beschreibt dann einen Weg von der Art des $12,7^\circ \text{ S}$ -Strahls. Die Schicht der inhomogenen Welle ist um so dünner, je näher die Einfallrichtung bei $12,7^\circ \text{ S}$ liegt. Der weiter aufsteigende Bruchteil des Strahls ist daher um so größer, je näher die Richtung bei $12,7^\circ \text{ S}$ liegt. Er verschwindet bei stärker abweichenden Richtungen. Auf diese Weise schließt sich das Verhalten der Nachbarrichtungen stetig an den Sonderfall $12,7^\circ \text{ S}$ an.

Die Tatsache, daß es bei vertikalem Einfall maximal 3 Reflexionshöhen gibt (S. 519), steht mit der Anzahl der Lösungen für eine bestimmte Elektronenkonzentration nicht in Widerspruch. Auch wenn 3 Reflexionshöhen auftreten, hat man in jeder Höhe der Ionosphäre höchstens 2 Lösungen für den aufsteigenden Strahl und 2 Lösungen für den absteigenden Strahl. Die dritte Reflexionshöhe kommt ja dadurch zustande, daß der ordentliche Strahl bei $\omega_N^2 = \omega^2$ nochmals aufgespalten wird, wobei ein Teil reflektiert wird und ein Teil weiter aufsteigt.

Zusammenfassung.

Die vorliegende Arbeit behandelt ausführlich die theoretischen Grundlagen für die Konstruktion von Strahlwegen nach dem in der ersten Arbeit [2] angegebenen graphischen Verfahren. Vor allem werden mehrere graphische Darstellungen des Brechungsindex in Abhängigkeit von der Richtung der Wellen normalen, wie sie im graphischen Verfahren benötigt werden, gezeigt und diskutiert.

Man muß, wenn man Strahlwege konstruieren will, auch noch die Abhängigkeit der Elektronenkonzentration von der Höhe kennen. Da es oft nur darauf ankommen wird, ein ungefähres Bild der Strahlwege zu erhalten, kann man für diese Abhängigkeit eine einfache Funktion annehmen, z. B. linearen Verlauf oder quadratischen („parabolischen“) Verlauf mit einem Maximum der Elektronenkonzentration (Scheitel der Schicht). Solche einfachen Annahmen liegen den Bildern von Strahlwegen zugrunde, die in der ersten Mitteilung [2] und in der demnächst erscheinenden dritten Mitteilung gezeigt werden. Es macht aber auch keine Schwierigkeit, eine beliebige, aus experimentellen Daten gefundene Abhängigkeit der Elektronenkonzentration von der Höhe zu verwenden. Man muß aber bedenken, daß der Verlauf in Wirklichkeit sich sowohl mit der Zeit ändert als

uch örtlichen Schwankungen unterworfen sein kann und daß man deshalb keine sehr große Genauigkeit der theoretisch ermittelten Strahlwege erwarten darf.

Die Anregung zur Arbeit gab Herr Geheimrat ZENNECK. Ich danke ich hierfür und für zahlreiche wertvolle Diskussionen.

Literatur. [1] BOOKER, H. G.: Proc. roy. Soc., Lond. (A) 55, 235 (1936). — Phil. Trans. roy. Soc. Lond. (A) 237, 11 (1939). — [2] POEVERLEIN, H.: S.ber. Bayer. Akad. 948, 175. (Habilitationsschrift der Technischen Hochschule München.) — [3] COTTE, M.: Comptes Rendus 222, 605 (1946). — [3a] MILLINGTON, G.: Nature, Lond. 163, 213 (1949). — [4] APPLETON, E. V.: J. Inst. electr. Engrs. 71, 42 (1932). — [5] RATCLIFFE, J. A.: Wireless Engr. 10, 54 (1933). — [6] FÖRSTERLING, K., u. H. LASSEN: Hoch-

frequenztechn. 42, 158 (1933). — [7] LASSEN, H.: Ann. Phys. [6] 1, 415 (1947). — [8] MALSCH, J.: Arch. elektr. Übertr. 2, 231 (1948). — [9] APPLETON, E. V., and G. BUILDER: Proc. phys. Soc., Lond. 45, 208 (1933). — [10] TAYLOR, M.: Proc. phys. Soc., Lond. 46, 408 (1934). — [11] BOOKER, H. G.: Proc. roy. Soc., Lond. (A) 147, 352 (1934); 150, 267 (1935). — [12] GOUBAU, G.: Hochfrequenztechn. 45, 179 (1935). — [13] SEATON, S. L.: Proc. Inst. Radio Engrs., N.Y. 36, 450 (1948). — [14] SCOTT, J. C. W.: Terr. Magn. 53, 109 (1948). — [15] HAMILTON, W. R.: Trans. roy. Irish Acad. 17, 144 (1837). — [16] MACCULLAGH, J.: Trans. roy. Irish Acad. 17, 252 (1837). — Collect. Works, S. 36. London 1880. — [17] SZIVESSY, G.: Kristalloptik, Handbuch der Physik, Bd. 20, S. 680 u. 707. Berlin 1928.

Dr. H. POEVERLEIN,
München, Walter v. Dyck-Platz 1,
Elektrophysikalisches Institut der Technischen Hochschule.

Meßgenerator für Magnetfelder.

VON WERNER PLOCH.

(Aus dem Physikalischen Institut der Universität Marburg.)

Mit 2 Textabbildungen.

(Eingegangen am 22. Juni 1949.)

Das Verfahren von PASCHEN und PRÜMM [1] zur Messung von Magnetfeldern mit Hilfe rotierender Spulen („Meßgenerator“) hat wegen seiner Handlichkeit öfter Anwendung gefunden [2], [3], wenn es sich um die punktweise Ausmessung einer Feldverteilung handelt. Sobald jedoch große Empfindlichkeit und Genauigkeit verlangt werden, treten gewisse technische Schwierigkeiten auf, als deren wichtigste Kontaktstörungen und Drehzahlschwankungen, unter Umständen auch Inkonzanz des Verstärkers zu nennen sind.

Eine Variante dieses Verfahrens, die diese Fehlerquellen weitgehend ausschaltet, hat sich bei der Ausmessung des Streufeldes von Massenspektrometermagneten bewährt und soll an Hand der Abb. 1 kurz beschrieben werden. Die vom Feld \mathfrak{B} in der Spule 1 induzierte Wechselspannung wird über R_1 und R_2 mit der vom Permanentmagneten NS in der Spule 2 erzeugten Spannung in Serie geschaltet. Dann und nur dann, wenn die um die Spulenwiderstände korrigierten Brückenwiderstände R_1 und R_2 sich wie die Beträge dieser Spannungen verhalten und das Feld \mathfrak{B} relativ zum Kompensationsfeld NS so gerichtet ist, daß beide Spannungen in Phase sind, wird die von einem Kathodenstrahloszillographen angezeigte Differenzspannung ein Minimum. Das Brückenverhältnis ist dann ein Maß für die Projektion B_{\perp} der Feldstärke \mathfrak{B} auf eine Ebene senkrecht zur Drehachse, während die Stellung des Magneten NS die Richtung von B_{\perp} in der Projektionsebene angibt.

Bei dem ausgeführten Generator ist der Magnet NS mit dem zylindrischen, um seine Längsachse gegen einen Teilkreis verdrehbaren Motorgehäuse starr verbunden, die Spulen 1 und 2 sitzen mit um 90° verdrehter Windungsebene fest auf der Motorwelle, welche auf der Seite der Spule 1 in einem 45 cm langen Neusilberrohr gelagert ist. Zur Phasenkompensation wird der ganze Motor mitsamt dem Schleifkontaktgehäuse in seiner Aufhängung verdreht, wodurch die Richtung von B_{\perp} mit einer Ablesegenauigkeit von 1° bestimmt werden kann.

Während in der ursprünglichen PASCHENSchen Anordnung an Stelle der Spulen 1 und 2 kleine eisenlose Trommelanker und an Stelle der Schleifringe 3, 4, 5,

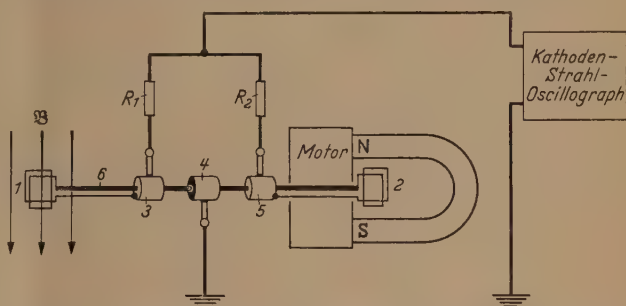


Abb. 1. Prinzipieller Aufbau und Schaltbild des Meßgenerators. 1 Meßspule (350 Windungen, etwa 30 mm²); 2 Kompensationspule (300 Windungen, etwa 80 mm²); 3, 4, 5 Schleifringe; 6 Hohlwelle aus unmagnetischem Werkstoff (45 cm lang); \mathfrak{B} Meßfeld; NS Kompensationsfeld; R_1 , R_2 Widerstände 10^4 bis $10^6 \Omega$.

Kollektoren verwendet wurden und die so erzeugten Gleichspannungen kompensiert werden mußten, können die hier erzeugten Wechselspannungen beliebig verstärkt werden. Dabei rufen restliche Kontaktstörungen, Brummstörungen und Drehzahlschwankungen zwar noch immer eine mehr oder minder starke Unruhe des Nullinstrumentes hervor, doch können bei Verwendung eines Kathodenstrahloszillographen als Nullinstrument diese Reststörungen völlig eliminiert werden. Da nämlich das Feld des Magneten NS nicht ganz homogen ist, enthält die in Spule 2 erzeugte Spannung Oberfrequenzen. Aus Symmetriegründen treten nur ungerade Harmonische auf und unter diesen wiederum bevorzugt die dritte Oberschwingung (bei der verwendeten Anordnung mit einer Amplitude, die größenordnungsmäßig 1% der Grundschwingungsamplitude beträgt). Ist an Stellen starken Feldabfalls die Meßspule 1 nicht klein genug, so werden auch in ihr solche Oberschwingungen erzeugt. Dieser Oberwellenanteil macht bei guten Kontakten den Hauptanteil der Restspannung aus und ergibt ein Oszillogramm, wie es die Abb. 2a zeigt. Wählt man die

Kippfrequenz des Oszillographen so, daß das Oszillogramm *a* dreifach übereinandergeschrieben wird (Abb. 2b), so kann man durch Verfeinerung des Brücken- und Richtungsabgleichs leicht erreichen, daß die drei Kurven der Abb. 2b in eine einzige (Abb. 2c) zusammenfallen, die nur noch die 3. Oberfrequenz darstellt und die Grundfrequenz nicht mehr enthält. Man hat damit erreicht, daß hinsichtlich der Grundfrequenz ein vollständiger Abgleich erzielt ist. Dieses Zusammenfallen läßt sich äußerst scharf einstellen und zwar unabhängig von unregelmäßigen Störungen, die das Kurvenbild nur an einzelnen Stellen durch Zacken oder sonstige Unregelmäßigkeiten verzerren.

Es interessiert in diesem Zusammenhang natürlich die Frage, welche Feldstärke man bei dem beschriebenen vollständigen Abgleich der Grundfrequenz

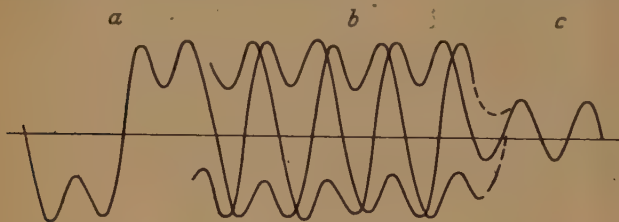


Abb. 2a—c. Oszillogramm der Brückenspannung. a Grundschiwingung (etwa 100 Hz), fast ganz (bis auf etwa 3%) abgeglichen, und 3. Harmonische; b dasselbe Oszillogramm, dreifach geschrieben; c Grundschiwingung abgeglichen, nur 3. Harmonische.

mißt, da ja die Spule eine endliche Ausdehnung hat und das Magnetfeld sich in dem von der rotierenden Spule überstrichenen Gebiet ändert. Die Rechnung läßt sich leicht durchführen, wenn man eine kreisförmige Spule vom Radius r zugrundelegt, die mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die z -Achse eines im Felde liegenden rechtwinkligen Koordinatensystems rotiert. Entwickelt man $B(x, y, z)$ in der Umgebung des Spulenmittelpunktes (= Koordinatenanfangspunkt) in eine Reihe, so erhält man für die induzierte Spannung den Ausdruck

$$U = \omega \pi r^2 \left[\left(B_x(0) + \frac{3}{32} r^2 \frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2} + \dots \right) \cos \omega t + \right. \\ \left. + B_y(0) + \frac{3}{32} r^2 \frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} + \dots \right) \sin \omega t \Big] \\ + \text{Glieder der 3., 5. usw. Harmonischen.}$$

Darin bedeuten $B_x(0)$ und $B_y(0)$ die (zur Rotationsachse senkrechten) x - und y -Komponenten der Feldstärke im Spulenmittelpunkt, die zweiten Ableitungen sind ebenfalls im Spulenmittelpunkt genommen. Eicht man also den Meßgenerator etwa im homogenen Feld einer langen Spule und mißt nachher ein inhomogenes Feld aus, so macht man einen Fehler von der Größenordnung

$$\frac{\Delta B}{B} = \frac{\Delta U}{U} = \frac{3r^2}{32} \sqrt{\frac{\left(\frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2}\right)^2}{B_x(0)^2 + B_y(0)^2}}. \quad (1)$$

Das Magnetfeld NS wird zur Erhöhung der Empfindlichkeit und zur Herabdrückung von Störfeldern in flüssigen vorteilhafterweise möglichst stark gemacht (hier war es nur etwa 120 Gb). Kohlekontakte haben sich bei den schwachen Strömen nicht bewährt, hingegen wurden mit vaselinegeschmierten Silberkontakten gute Erfolge erzielt; die Meßgenauigkeit war bei Kohlekontakten, mit Siebkette und Verstärker ($V = 6000$) und Zeigerinstrument 1%, hingegen bei Silberkontakten und Oszillograph (ohne Siebkette) 0,25% bis herunter zu Feldstärken von etwa 200 Gb. Der nach Gl. (1) berechnete Fehler betrug an den Stellen stärkster Änderung des Feldabfalls nur 0,05%.

Zusammenfassung.

In zwei auf gemeinsamer Achse rotierenden Spulen werden durch das Meßfeld bzw. ein konstantes Verdrängungsfeld Wechselfspannungen induziert, deren Grundwellenanteil durch Anwendung eines Kathodenstrahl-Oszillographen als Anzeigegerät nach Phase und Betrag unabhängig von Kontakt- und sonstigen Störungen abgeglichen werden kann. Damit können Richtung und Betrag der Feldstärkekomponenten senkrecht zur Rotationsachse gemessen werden. Die Einstellgenauigkeit beträgt bei 0,5 Gb 50%, bei 50 Gb 1%, bei höheren Feldstärken mindestens 0,25%.

Herrn Prof. WALCHER danke ich für Anregung und freundliches Interesse.

Literatur. [1] PASCHEN, F.: Phys. Z. 6, 371 (1905). — PRÜMM: Diss. Tübingen 1906. — [2] PFAFFENBERGER, J.: AEG-Jb. 4, 123 (1935). — [3] KOHAUT, A.: Z. techn. Phys. 18, 198 (1937).

WERNER PLOCH, (16) Marburg a. d. Lahn,
Physik. Institut der Universität, Renthof 5.

Berichte.

Gestaltungsgrundlagen mechanischer und optischer Schwingungsmeßgeräte*.

VON HEINRICH FREISE.

(Institut für Instrumentenkunde in der Max-Planck-Gesellschaft, Göttingen.)

Mit 21 Textabbildungen.

(Eingegangen am 24. Februar 1949.)

Einleitung.

Mechanische und optische Schwingungsmeßgeräte spielen wegen ihres verhältnismäßig einfachen Aufbaues insbesondere für technische Messungen eine

* Nach einem Vortrag gehalten am 21. Mai 1948 auf der Tagung der VDI-Fachausschüsse für Schwingungstechnik und Schalltechnik in Stuttgart.

große Rolle. An dieser Stelle sollen lediglich Geräte nach dem Feder-Masse-System behandelt werden. Wesentlich für ihre Gestaltung ist die Einhaltung gewisser Richtlinien, die vor allem mit dem dynamischen Verhalten zusammenhängen [1], [2].

Die grundsätzliche Meßanordnung zeigt Abb. 1. In einem starr mit dem Versuchskörper verbundenen

gestellt ist eine Feder und an dieser eine Masse befestigt. Bei einer Relativbewegung zwischen Masse und Gestell wirkt eine durch Kolben und Zylinder ersinnbildlichte Dämpfung, die der Geschwindigkeit proportional ist. Das System stellt einen harmonischen Schwinger von einem Freiheitsgrad dar. Die Eigenfrequenz n_0 (des ungedämpften Systems) ist bei Schwingwegmeßgeräten klein gegenüber der Frequenz n des zu untersuchenden (hier als sinusförmig angenommenen) Vorganges. Die Amplitude a der

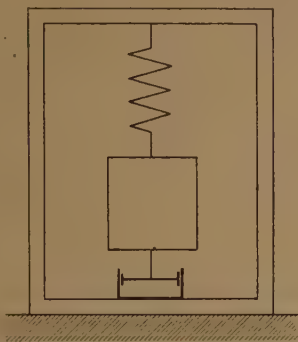


Abb. 1. Feder-Masse-System mit Relativdämpfung.

Relativbewegung zwischen Masse und Gestell im eingeschwungenen Zustand ist dann gleich der Amplitude der Bewegung des Versuchskörpers. Hingegen ist bei Beschleunigungsmeßgeräten $n_0 \gg n$. Dann wird

$$a = \frac{b}{(2\pi n_0)^2},$$

wenn b die Amplitude der Beschleunigung des Versuchskörpers bezeichnet. Die Meßwege nehmen also mit wachsender Eigenfrequenz. Zur Untersuchung von Drehbewegungen dienen Systeme, die um eine

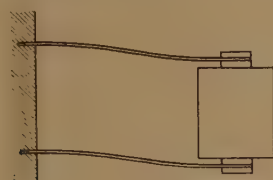


Abb. 2. Angenäherte Zweiblattfeder-Geradführung.

Achse ausgewuchtet sind. Im übrigen gelten entsprechende Betrachtungen.

Mit der Aufgabenstellung hängt eng die Ausbildung des eigentlichen Meßelementes, ferner die Art der Anzeige zusammen. Von Bedeutung sind schließlich auch gewisse Bauelemente, wie Federgelenke und Dämpfungseinrichtungen¹.

I. Das eigentliche Meßelement.

Von dem eigentlichen Meßelement wird insbesondere gefordert, daß die Federkennlinie eine Gerade ist. Das Element soll im übrigen nur den gewünschten Freiheitsgrad aufweisen.

Das läßt sich bei den für *translatorische Bewegungen* in Betracht kommenden Meßelementen leicht erreichen, indem man die Masse zwischen zwei dünnen

¹ Die Dämpfung soll nicht nur die Eigenschwingungen schnell zum Abklingen bringen, sondern auch einen möglichst konstanten Abbildungsmaßstab in einem großen Frequenzbereich sicherstellen.

kreisförmigen, am Rande fest eingespannten Platten geradeführt. Die Federkennlinie ist jedoch nur in einem verhältnismäßig kleinen Bereich der Federdurchbiegung eine Gerade. Einen wesentlich größeren Bereich erhält man mit der Anordnung nach Abb. 2, bei der die Masse die freien Enden zweier einseitig eingespannter Blattfedern miteinander verbindet. Die Steifigkeit gegen seitliche Kräfte ist allerdings beschränkt, die Geradführung zudem nur angenähert.

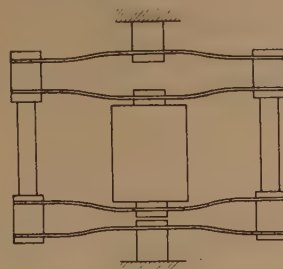


Abb. 3. Vierblattfeder-Geradführung.

Diese Nachteile vermeidet die auf Abb. 3 dargestellte Anordnung. Die Masse ist hier zwischen zwei Blattfederpaaren geradegeführt. Die Mitten der inneren Federn sind an der Masse, die der äußeren Federn am Gestell befestigt, die freien Enden durch leichte, starre Zwischenstücke miteinander verbunden. Bei niedriger Eigenfrequenz wird die Federdurchbiegung unter dem Gewicht der Masse leicht verhältnismäßig groß. Dann benutzt man zweckmäßig das Meßelement des GEIGERSchen Vibrographen nach Abb. 4. Die Masse ist am Ende eines um eine Achse drehbaren Hebels befestigt. Die (einstellbare) Gleichgewichtslage sichert eine Spiralfeder. Lage I gilt für senkrechte, Lage II für waagerechte Meßrichtung. Die Eigenfrequenz im letzten Falle ist wegen des zusätzlichen „Pendeleffektes“ größer als im ersten. In Lage III steht die Drehachse senkrecht. Die Meßrichtung ist wieder waagrecht, aber senkrecht zur Zeichenebene. Man erhält dann dieselbe Eigenfrequenz wie in Lage I.

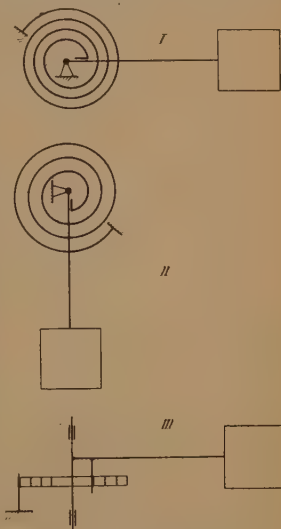


Abb. 4. Meßelement des GEIGERSchen Vibrographen.

Systeme zur Untersuchung von *Drehbewegungen* lassen sich ohne Schwierigkeiten bis herab zu sehr niedriger Eigenfrequenz bauen.

II. Die Meßwertanzeige.

Die Meßwege müssen zur Anzeige häufig vergrößert, gelegentlich auch verkleinert werden. Insbesondere bei langsameren Vorgängen wird das mechanische, bei schnellen das optische Verfahren benutzt [3], [4], [5]: Die Anzeige kommt im ersten Falle über ein Zahnradgetriebe oder ein Hebelsystem, im zweiten über einen Drehspiegel zustande, der ein Lichtbündel steuert. Alle mechanischen Übertragungsglieder müssen so steif sein, daß sie durch den Meßvorgang zu keinerlei Eigenschwingungen angeregt werden können.

Dazu sind vor allem kurze Hebel erforderlich. Dann kann man das ganze System genügend genau wieder als einen harmonischen Schwinger von einem Freiheitsgrad ansehen.

Alle Glieder des Anzeigemechanismus von Dreh-schwingungsmeßgeräten müssen ausgewuchtet sein.

0 1 2 3 4 5 cm

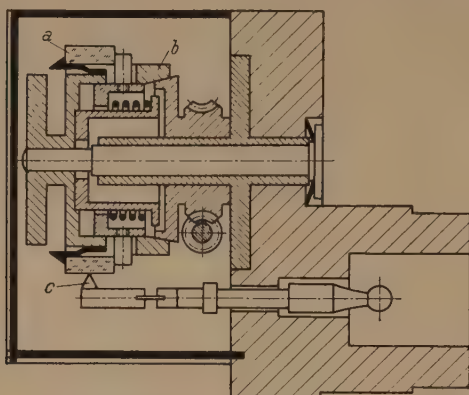


Abb. 5. Normalritzschreibgerät. *a* Schreibzylinder; *b* Trommel zum Transport des Schreibzylinders; *c* Schreibdiamant.

Das ist anzustreben auch bei Geräten zur Untersuchung translatorischer Bewegungen. Die Meßwegamplitude von Beschleunigungsmeßgeräten ist dann aber

$$\alpha = \frac{m_e}{m_e + m'_a} \cdot \frac{b}{(2\pi n_0)^2},$$

0 1 2 3 4 5 cm

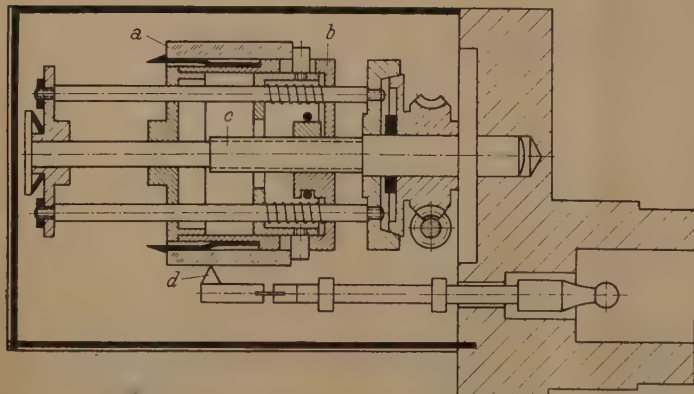


Abb. 6. Langzeitritzschreibgerät. *a* Schreibzylinder; *b* Trommel zum Transport des Schreibzylinders; *c* Gewindespindel; *d* Schreibdiamant.

wenn m_e die Masse des eigentlichen Meßelementes und m'_a die auf diese Masse reduzierte Masse des Anzeigemechanismus bezeichnet. Die Meßwege werden also kleiner mit zunehmender reduzierter Masse, die man daher auf das äußerste beschränkt. Entsprechendes gilt nicht für Drehbeschleunigungsmeßgeräte.

1. Mechanische Verfahren.

Mechanische Verfahren sind gewöhnlich mit Reibung behaftet. Sie äußert sich in einem Betrag, um den die Nullage der Anzeige nach beiden Seiten unsicher ist. Das Verhältnis dieses Betrages zur Ampli-

tude der Anzeige bei fehlender Reibung, den Reibungsfehler f_r , erhält man bei Translations-Schwingungsmeßgeräten aus der Beziehung

$$f_r = \frac{R}{(m_e + m'_a)(2\pi n_0)^2 x}.$$

Hierin ist R die auf die Masse des eigentlichen Meßelementes reduzierte Reibung und x die Amplitude des zu messenden Weges. Der Reibungsfehler wird also kleiner mit wachsender Hauptmasse und Eigenfrequenz. Hingegen wird für Translations-Beschleunigungsmeßgeräte

$$f_r = \frac{R}{m_e b}.$$

Die Eigenfrequenz ist hier also ohne Einfluß, wenn man wieder die zu messende Größe einführt. Sinn-gemäße Zusammenhänge bestehen bei Systemen zur Untersuchung von Drehbewegungen.

Zahnradgetriebe kommen insbesondere für Geräte mit Zeigerablesung, Hebelsysteme hauptsächlich für schreibende Geräte in Betracht. Im ersten Falle lassen sich reibungsbehaftete Spitzen- oder Zapfenlager kaum vermeiden. Im zweiten Falle bildet man alle Lagerstellen nach Möglichkeit als reibungsfreie Federgelenke aus, so daß lediglich die Schreibstiftreibung übrig bleibt. Sie fällt um so weniger ins Gewicht, je kleiner die Übersetzung, also die Schreibhöhe ist. Eine kleine Schreibhöhe ist häufig auch aus Platz- und Gewichtsgründen erwünscht. Sie führt schließlich zu kurzen Hebeln, die weniger zu Eigenschwingungen neigen.

Sehr kleine Schreibhöhen lassen sich erreichen, wenn man die Meßwege mittels eines geschliffenen Diamanten in Glas oder Stahl ritzt und nach dem Versuch mikroskopisch ausgewertet [3], [6], [7]. Man kommt ohne Schwierigkeiten zu einer Strichbreite von 3μ bei einer Reibung (der Bewegung) von etwa 0,5 g. Eine Schreibhöhe von einigen zehnteln Millimetern ist also völlig ausreichend.

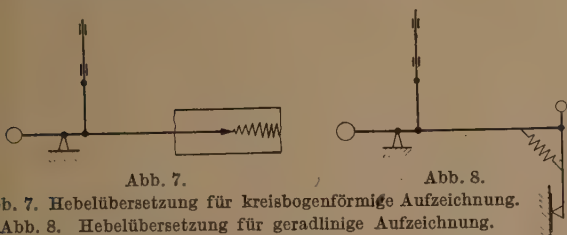
Das in der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt (DVL), Berlin-Adlershof, entwickelte Normalritzschreibgerät zeigt Abb. 5. Als Schreibfläche dient der Außenmantel eines auf eine Trommel geschobenen Hohlzylinders, der, von einem kleinen Motor angetrieben, sich nahezu einmal herumdreht. Der Diamant ist am Ende eines zwischen zwei Lenkern annähernd geradegeführten Röhrchens befestigt, das mit dem Meßelement irgendwie gekuppelt wird. Bei dem Langzeitgerät nach

Abb. 6 verschiebt sich die Trommel während der Drehung auch in axialer Richtung auf einer Gewindespindel. Dabei kommen 25 Umdrehungen zustande entsprechend einer Schreiblänge bei (gewöhnlich notwendiger) 100facher optischer Vergrößerung von etwa 200 m.

Eine noch verhältnismäßig kleine Strichbreite — etwa 20μ — erzielt man auch mit einem geschliffenen Saphir auf schichtlosem Film oder Wachspapier [3]. Die Reibung beträgt wieder etwa 0,5 g. Im äußersten Falle kommt man also mit einer Schreibhöhe von nur einigen Millimetern aus, muß

der Auswertung dann jedoch wieder optische Hilfsmittel benutzen. Man wählt daher die Schreibhöhe im allgemeinen größer, geht aber bei Film nicht über 1 mm, bei Wachspapier gewöhnlich nicht über 2 mm hinaus.

Die Meßwege werden zumeist auf ein von einer Nadelwalze angetriebenes Band aufgezeichnet, das von einer Vorratsrolle abwickelt und auf eine weitere von jener Walze über eine Rutschkupplung angetriebene Rolle wieder aufspult. Die Stachelwalze wird gewöhnlich von einem kleinen Motor angetrieben. In vielen Fällen genügt kreisbogenförmige Aufzeichnung gemäß Abb. 7. Bei größeren Übertragungen muß man mehrere Hebel hintereinander anschalten. Bequemere Auswertung ermöglicht die geradlinige Aufzeichnung nach Abb. 8. An die Stelle des Schreibstiftes ist ein weiterer, nun erst den Schreibstift tragender Hebel angelenkt, der durch eine Feder dauernd gegen das senkrecht zur Zeichenebene ablaufende Band gezogen wird.



2. Optisches Verfahren.

Das hauptsächlich für schreibende Geräte angeordnete optische Verfahren arbeitet reibungsfrei, wenn an alle Lagerstellen als Federgelenke ausgebildet. Die erreichbare kleinste Strichbreite ist durch das Korn der lichtempfindlichen Schicht (Bromsilberpapier) bedingt. Man rechnet mit 20μ [4], [5].

Die übliche Anordnung ist auf Abb. 9 dargestellt. Die senkrechten Ränder eines in der Brennebene des Objektives O liegenden Spaltes S werden über den Drehspiegel Sp rückläufig auf dem wieder in der Brennebene ablaufenden lichtempfindlichen Band B abgebildet. Zwischen Objektiv und Drehspiegel ist eine Blende Bl angeordnet, deren waagerechte Ränder die Zylinderlinse Z auf Band B abbildet. Ein Kondensor K entwirft ein Bild des Glühkörpers der Lampe L auf Spalt S . Die Öffnung der Blende Bl' ist ein von diesem Kondensor entworfenes verkleinertes Bild der Öffnung der Blende Bl , läßt also nur das zur Abbildung notwendige Licht hindurch. Die Lichtquelle kann im übrigen auch durch eine Linse unmittelbar im Spalt S auf die Blende Bl abgebildet werden. Dabei muß das Bild des Glühkörpers die Blendenöffnung gerade ausfüllen.

Der Ablesefehler der Aufzeichnung in beiden Richtungen ist im wesentlichen durch die Beugungsmanschärfe B gegeben. Sie nimmt ab mit wachsendem Öffnungsverhältnis u des Objektives bzw. der Zylinderlinse (freie Öffnung/Bildweite) gemäß der Beziehung

$$B = \lambda/u,$$

wenn λ die Wellenlänge des zur Abbildung benutzten Lichtes bedeutet. Man gewinnt also nichts an Meßgenauigkeit, wenn man lediglich den Lichtzeiger ver-

längert, da im selben Verhältnis auch die Beugungsmanschärfe größer wird. Ihr doppelter Betrag — von beiden Rändern — sollte mithin im äußersten Falle nicht größer als die durch das Korn der lichtempfindlichen Schicht bedingte kleinste Strichbreite sein. Dazu darf dann aber das Öffnungsverhältnis nicht kleiner als 1:20 gewählt werden, wenn man eine Lichtwellenlänge von $0,5\mu$ in Rechnung setzt.



Abb. 9. Grundsätzliche Anordnung zur optischen Aufzeichnung über einen Drehspiegel. O Objektiv; S Spalt; Sp Drehspiegel; B lichtempfindliches Band; Bl Objektivblende; Z Zylinderlinse; K Kondensor; L Glühlampe; Bl' Kondensorblende.

III. Bauelemente.

1. Federgelenke.

Federgelenke traten schon bei der Besprechung des eigentlichen Meßelementes in Erscheinung. Federnde Platten oder Blattfedern übernahmen dort die Führung der Masse und lieferten gleichzeitig die notwendige Rückstellkraft. Einfache Blattfedern bilden zumeist auch die Gelenke von Stoßstangen in Hebelübersetzungen. Bei größeren Drehwinkeln benutzt man häufig Kreuzfedergelenke nach Abb. 10. Die Federn müssen auch auf ein mögliches Knicken hin

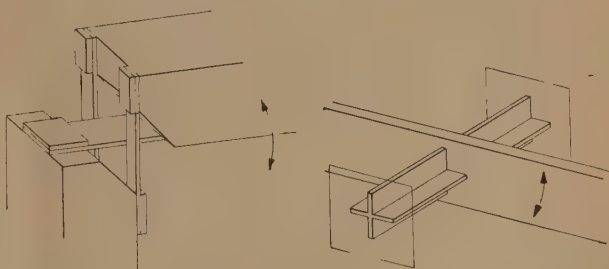


Abb. 10. Biege-Kreuzfedergelenk. Abb. 11. Torsions-Kreuzfedergelenk.

untersucht werden. Außerordentlich steif gegen seitliche Kräfte läßt sich das Torsionsgelenk nach Abb. 11 bauen. Verdreht werden zwei Ansätze mit symmetrisch-kreuzförmigem Querschnitt, die man zweckmäßig aus dem Vollen herausarbeitet.

2. Dämpfungseinrichtungen.

Ein Maß für die Dämpfung eines hier immer als translatorischen Schwinger behandelten Feder-Masse-Systems stellt der dimensionslose Ausdruck

$$D = \frac{k}{4\pi n_0 (m_e + m'_a)}$$

dar. Hierin ist k der Dämpfungsfaktor, die an der Masse wirkende Dämpfungskraft je Geschwindigkeitseinheit. D wird schlechthin Dämpfung genannt [8]. Wirkt die Dämpfung an einer anderen Stelle, so muß die Masse auf diesen Punkt reduziert werden. $D = 1$ bedeutet aperiodische Dämpfung. Für die vorliegenden Zwecke kommen insbesondere Wirbelstrom- und Flüssigkeitsdämpfungen in Betracht.

Wirbelstromdämpfungen sind der Geschwindigkeit proportional und nur wenig temperaturabhängig. Der Dämpfungsfaktor ist allerdings verhältnismäßig klein, so daß diese Art der Dämpfung insbesondere bei Systemen niedriger Eigenfrequenz und kleiner Masse benutzt wird. Die übliche Anordnung zeigt schematisch Abb. 12. Die Schenkel eines Dauermagneten umfassen eine Aluminium- oder Kupferplatte. Bei einer Relativbewegung zwischen Magnet und Platte in Pfeilrichtung entstehen Wirbelströme in der Platte, die die Bewegung hemmen. Bei Systemen niedriger Eigenfrequenz ist zweckmäßig der

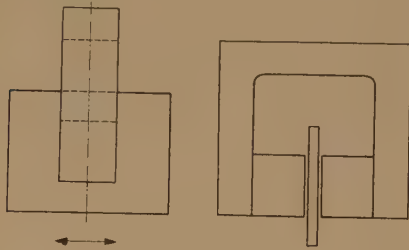


Abb. 12. Grundsätzliche Anordnung der Wirbelstromdämpfung.

Magnet, bei Systemen höherer Eigenfrequenz die Dämpferplatte Hauptmasse. Die Dämpferplatte besteht im ersten Falle aus Kupfer, im zweiten gewöhnlich aus Aluminium, bei vorgegebener Masse aus Platzgründen und wegen des kleiner werdenden Magneten auch aus Gewichtsgründen jedoch wieder aus Kupfer. Sehr handliche Anordnungen erhält man häufig auch, wenn man die Dämpferplatte, ins Schnelle übersetzt, von der Hauptmasse antreibt.

Flüssigkeitsdämpfungen nutzen die hemmende Wirkung einer zähen Flüssigkeit aus. Der Temperatureinfluß ist im allgemeinen wesentlich größer als



Abb. 13. Feder-Masse-System mit Flüssigkeitsdämpfung.

bei der Wirbelstromdämpfung, die Dämpfung zudem nur dann der Geschwindigkeit proportional, wenn man Wirbelbildung sorgfältig vermeidet. Im anderen Falle wächst allerdings der Dämpfungsfaktor. Man schafft daher gewöhnlich einen Ausgleich und benutzt die Flüssigkeitsdämpfung dort, wo die Wirbelstromdämpfung nicht ausreicht, insbesondere also bei Systemen mit höherer Eigenfrequenz und größerer Masse. Abb. 13 zeigt ein Feder-Masse-System mit Zweiplatten-Geradführung und Flüssigkeitsdämpfung (die Flüssigkeit ist durch kurze waagerechte Striche angedeutet). Änderungen des Flüssigkeitsvolumens durch Temperaturschwankungen gleicht eine Gummimembran aus.

IV. Die Gesamtmeßanordnung.

Die grundsätzlichen Darlegungen sollen nun auf vollständige Geräte angewandt werden. Die angeführten, allgemein anwendbaren Geräte wurden in

der DVL entwickelt. Die Hauptdaten sind jeweils unter den Abbildungen angegeben¹.

1. Mechanische Geräte.

a) Geräte mit Zeigerablesung.

Mechanische Geräte mit Zeigerablesung — an einem kreisförmigen Zifferblatt — werden naturgemäß insbesondere zur Ermittlung der Extremwerte benutzt. Das gilt vor allem für Beschleunigungsmessgeräte, die man zweckmäßig mit Schleppzeigern ausrüstet.

Bezeichnet M_r das Reibungsmoment, Θ das Trägheitsmoment und $d\omega/dt$ die Drehbeschleunigung des Schleppzeigers um seine Drehachse, so muß

$$M_r \geq \Theta \frac{d\omega}{dt}$$

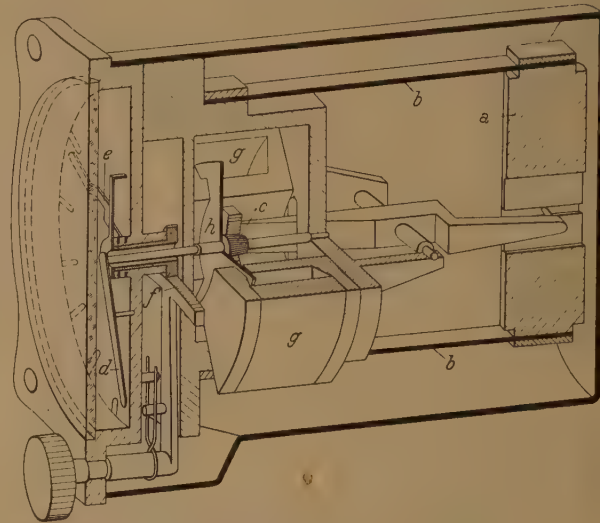


Abb. 14. Beschleunigungsmesser mit Wirbelstromdämpfung. Eigenfrequenz: 11 Hz; Dämpfung: 0,3; Meßbereich: -4 bis +8 g. a Masse; b Blattfeder; c Zahnradgetriebe zur Meßwegübertragung; d Meßzeiger; e Schleppzeiger; f Zahnradgetriebe zum Zurückstellen der Schleppzeiger; g Dauermagnet; h Dämpferplatte.

sein, wenn kein Überschleudern stattfinden soll. Mit wachsendem Reibungsmoment sinkt aber die Meßgenauigkeit; das Trägheitsmoment muß also möglichst klein sein.

Abb. 14 veranschaulicht einen Beschleunigungsmesser mit Schleppzeigern, angenäherter Zweiplattenfeder-Geradführung der Masse und Wirbelstromdämpfung [9]. Die Auslenkung der Masse wird über ein Zahnradgetriebe in die Drehung des eigentlichen Meßzeigers umgewandelt. Die Schleppzeiger lassen sich über ein weiteres Zahnradgetriebe in ihre Anfangslage zurückdrehen. Es lag nahe, die Dämpferplatte (aus Aluminium) auf der Meßzeigerachse zu befestigen; am Gehäuse wurden zwei Dauermagnete angeordnet.

b) Schreibende Geräte.

Glas- und Stahlritzgeräte genügen harten Anforderungen in bezug auf kleinen Raum und geringes Gewicht. Auf Stahl schreibt man in solchen Fällen in denen wegen Beschleunigungen ein so hohe

¹ Die Dämpfung wurde so bestimmt, als ob keine Reibung vorhanden wäre. Einschränkungen des Meßbereiches durch etwaige Auswanderungserscheinungen der Masse blieben unberücksichtigt.

preßdruck des Diamanten erforderlich ist, daß Glas zittern würde.

Der Aufbau eines Glasritz-Beschleunigungsschreibers mit Vierblattfeder-Geradföhrung der Masse und Wirbelstromdämpfung geht aus Abb. 15 hervor [9]. Der Magnet ist wieder gerätefest; die Dämpferplatte

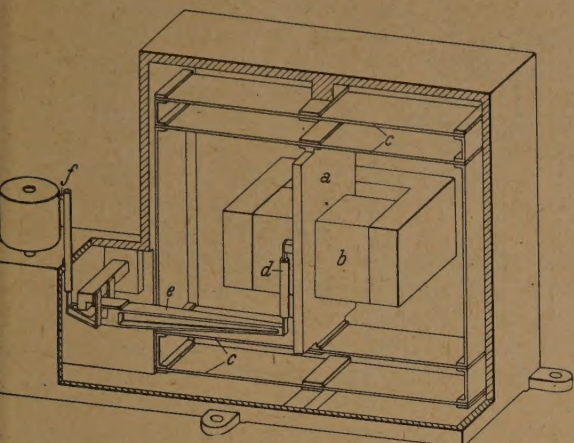


Abb. 15. Glasritz-Beschleunigungsschreiber mit Wirbelstromdämpfung. Eigenfrequenz: 15 Hz; Dämpfung: 0,2; Meßbereich: $\pm 1,5$ g, ± 6 g, -4 bis $+10$ g. a Masse (Dämpferplatte); b Dauermagnet; c Kreuzfedergelenk; d Stoßstange; e Zwischenhebel; f Schreibdiamant.

stellt die Masse dar. Sie besteht im vorliegenden Falle aus Kupfer (eine Aluminiumplatte von gleicher Masse würde hier zu einem verhältnismäßig großen Magneten führen). Die Meßwege sind so groß, daß

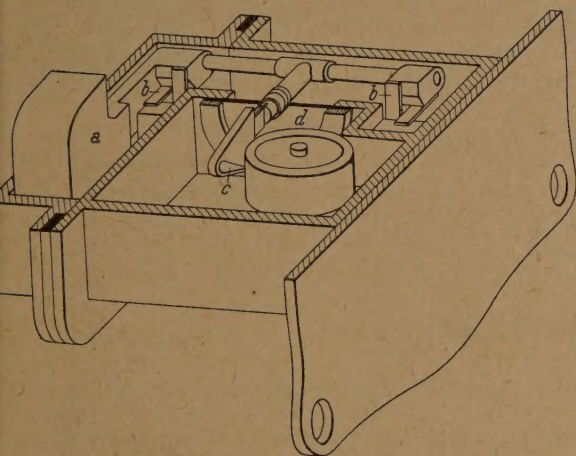


Abb. 16. Glasritz-Schwingwegschreiber mit Flüssigkeitsdämpfung. Eigenfrequenz: 8,7 Hz bei senkrechter Meßrichtung, 9,1 Hz bei waagerechter Meßrichtung; Dämpfung: 0,7; Meßbereich: ± 2 mm; Gewicht: 7 kg. a Masse (in Dämpfungsflüssigkeit); b Kreuzfedergelenk; c Schreibdiamant; d Ausgleichsmembran.

untersetzt auf den Diamanten des Ritzschreibers übertragen werden mußten. Beschleunigungsschreiber hoher Eigenfrequenz erfordern Zweiplatten-geradföhrung und Flüssigkeitsdämpfung gemäß Abb. 13.

Der Glasritz-Schwingwegschreiber mit Flüssigkeitsdämpfung nach Abb. 16 hat als Meßelement das GEIGERSche Pendel [10]. An die Stelle der Spiralfeder treten indessen Biege-Kreuzfedergelenke, die gleichzeitig die Drehachse bilden. Diese Achse verläuft in der Ebene der Ausgleichsmembran, durch die hindurch sich der Schreibhebel „ins Trockene“ streckt, in dem sich auch die übrigen Teile der Schreibeinrichtung befinden. Die Meßwege werden im Verhältnis 1:3 verkleinert aufgezeichnet. Im

vorliegenden Falle wurde auch in waagerechter Richtung bei waagerechter Drehachse gemessen. Die Eigenfrequenz in dieser Lage ist wegen des verhältnismäßig hohen Absolutwertes nicht wesentlich höher als bei senkrechter Meßrichtung.

Geräte mit Aufzeichnung auf Film oder Wachspapier benötigen gelochtes Band, wenn wahlweise

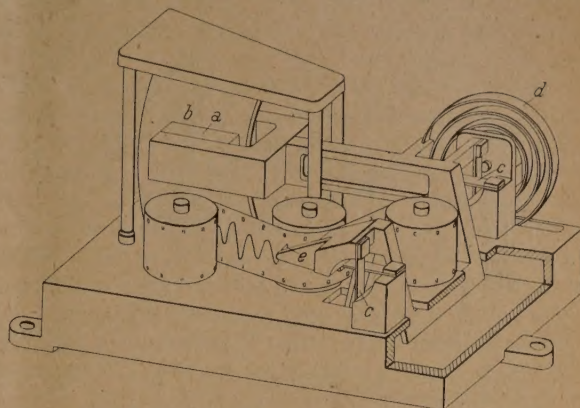


Abb. 17. Schwingwegschreiber mit Wirbelstromdämpfung und Aufzeichnung auf Film oder Wachspapier. Eigenfrequenz: 1,6 Hz; Dämpfung: 0,3; Meßbereich: ± 14 mm; Schreibhöhe: 9 mm; Gewicht: 0,42 kg. a Masse (Dauermagnet); b Dämpferplatte; c Kreuzfedergelenk; d Spiralfeder; e Schreibdiamant.

auf das eine oder andere geschrieben werden soll. Bei ausschließlicher Verwendung von Wachspapier läßt man zweckmäßig die Stachelwalze, die in diesem Falle scharfe Spitzen aufweist, das Band selbsttätig lochen.

Um den ersten Fall handelt es sich bei dem auf Abb. 17 dargestellten Schwingwegschreiber mit Wirbelstromdämpfung [10]. Das Meßelement ist wieder

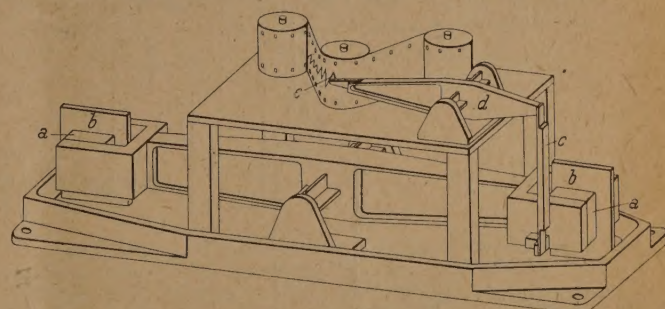


Abb. 18. Drehschwingwegschreiber mit Wirbelstromdämpfung und Aufzeichnung auf Film oder Wachspapier. Eigenfrequenz: 1,6 Hz; Dämpfung: 0,3; Meßbereich: $\pm 0,5^\circ$; Schreibhöhe: 10 mm; Gewicht: 1 kg. a Masse (Dauermagnet); b Dämpferplatte; c Stoßstange; d Zwischenhebel; e Schreibdiamant.

ein GEIGERSches Pendel, und wieder bilden Biege-Kreuzfedergelenke die Drehachse. Eine Spiralfeder ist allerdings wegen der niedrigen Eigenfrequenz gleichfalls erforderlich. Die Dämpferplatte (aus Kupfer) ist gerätefest; der Magnet stellt die Pendelmasse dar. Die Meßwege werden wie bei dem Glasritz-Schwingwegschreiber im Verhältnis 1:3 verkleinert aufgezeichnet. In waagerechter Richtung mißt man hier bei senkrechter Drehachse. Die Eigenfrequenz ist dann also dieselbe wie bei senkrechter Meßrichtung.

Wahlweise für Film und Wachspapier ist auch der Drehschwingwegschreiber mit Wirbelstromdämpfung nach Abb. 18 eingerichtet [11], [12]. Die Meßwege werden über einen Zwischenhebel vergrößert

aufgezeichnet. Die Drehachsen sind als Torsions-Kreuzfedergelenke ausgebildet. Die Dämpfungseinrichtung entspricht der des letzten Gerätes.

Abb. 19 veranschaulicht den Aufbau eines Beschleunigungsschreibers mit Vierblatfeder-Geradführung der Masse, Flüssigkeitsdämpfung und Aufzeichnung lediglich auf Wachspapier [9], [13]. Die

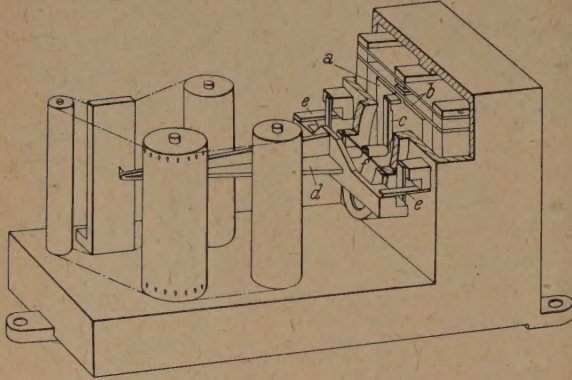


Abb. 19. Beschleunigungsschreiber mit Flüssigkeitsdämpfung und Aufzeichnung auf Wachspapier. Eigenfrequenz: 12 bis 15 Hz; Dämpfung: 0,4 bei 20° C; Meßbereich: -2 bis +7 g; Schreibhöhe: 50 mm. *a* Masse (in Dämpfungsflüssigkeit); *b* Blattfederpaar; *c* Stoßstange; *d* Schreibhebel; *e* Kreuzfedergelenk; *f* Ausgleichsmembran.

Meßwege werden wie bei dem Gerät nach Abb. 16 von einem die Ausgleichsmembran durchdringenden Hebel aufgezeichnet. Die Kreuzfedergelenke zu beiden Seiten der Membran liegen hier jedoch im Trockenen. Die Aufzeichnung geschieht kreisbogenförmig.

Der Aufbau eines entsprechenden Gerätes mit geradliniger Aufzeichnung und Wirbelstromdämpfung

den Elemente. Den kleinstmöglichen Ablesefehler ($\pm 10 \mu$) wird man häufig auch dann anstreben, wenn eine verhältnismäßig große Schreibhöhe aus Gründen der bequemen Auswertung gewählt wurde. Man kann dann im äußersten Falle immer noch optisch

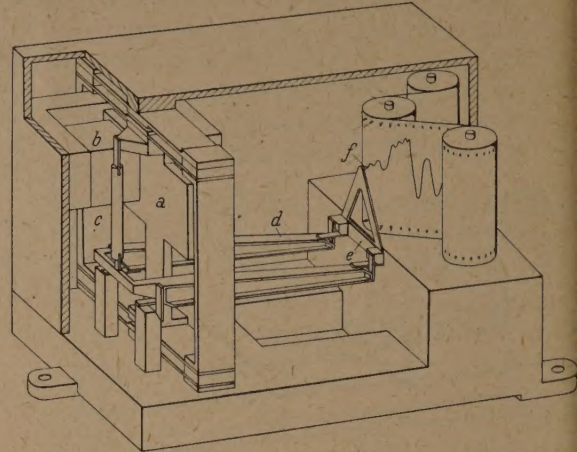


Abb. 20. Beschleunigungsschreiber mit Wirbelstromdämpfung und Aufzeichnung auf Wachspapier. Eigenfrequenz: 15 Hz; Dämpfung: 0,4 bei 20° C; Meßbereich: -4 bis +8 g; Schreibhöhe: 50 mm. *a* Masse (Dämpferplatte); *b* Dauermagnet; *c* Stoßstange; *d* Doppelzwischenhebel; *e* Brücke; *f* Schreibstift.

Hilfsmittel benutzen und kommt so ohne wesentlichen Aufwand unter Umständen zu entsprechend größerer Meßgenauigkeit.

Den Aufbau eines Schwingwegschreibers mit Wirbelstromdämpfung erkennt man auf Abb. 21. Das Meßelement ist ein GEIGERSches Pendel, dessen Drehachse durch Torsions-Kreuzfedergelenke

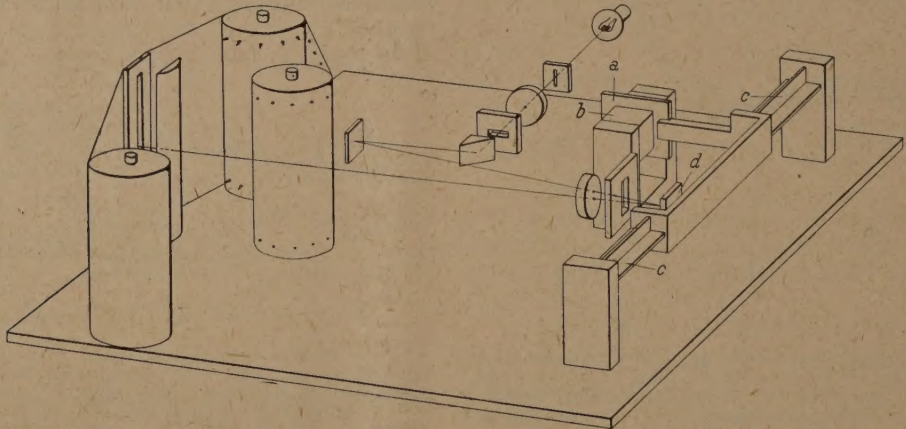


Abb. 21. Optischer Schwingwegschreiber mit Wirbelstromdämpfung. Eigenfrequenz: 25 Hz; Dämpfung: 0,2; Meßbereich: $\pm 1,5$ mm; Schreibhöhe: 30 mm; Gewicht: 0,9 kg. *a* Masse (Dämpferplatte); *b* Dauermagnet; *c* Torsions-Kreuzfedergelenk; *d* Drehspiegel.

wird deutlich aus Abb. 20 [9]. Die Dämpfungseinrichtung entspricht der des Gerätes nach Abb. 15. Es sind indessen zwei Magnete vorhanden (von denen nur einer gezeichnet ist). Die Schreibstift-Geradführung kommt über einen Doppelhebel mit angelenkter Brücke zustande.

2. Optische Geräte.

Bei optischen Geräten mit Federgelenken — es handelt sich hier lediglich um schreibende Geräte — gelangt man im allgemeinen wegen der fehlenden Reibung ohne Schwierigkeiten zu verhältnismäßig kleinen Massen. Die Grenze ergibt sich im wesentlichen aus Baugründen mit Rücksicht auf die federn-

gebildet wird; die Spiralfeder entfällt. Die Dämpferplatte (aus Kupfer) stellt die Masse dar; der Magnet ist gerätefest. Der Drehspiegel ist unmittelbar in der Drehachse angeordnet. Die übrigen optischen Elemente entsprechen der Anordnung nach Abb. 20. Schwingungen in waagerechter Richtung mißt man mit Rücksicht auf konstante Eigenfrequenz bei senkrechter Drehachse. Es wurde eine Strichbreite von nur etwa 30μ erzielt.

V. Schlußbemerkungen.

Die für die einzelnen Meßaufgaben zu wählenden technischen Mittel ergeben sich nun ohne Schwierigkeiten. Entscheidend sind immer die Frequenz des z

versuchenden Vorganges und die Meßwege, die meist aufgezeichnet werden müssen.

Diese Wege sind bei *Schwingwegmeßgeräten* häufig groß, daß man zum mindesten mit dem Glasritzfahren zum Ziel kommt. Gelegentlich ist auch eine Aufzeichnung auf Film oder Wachspapier noch möglich. Eine verkleinerte Aufzeichnung der Meßwege anzustreben, wenn zur Erzielung einer geringen Störwirkung des Meßgerätes auf den Versuchskörper die Masse klein gehalten werden muß. Zur Verringerung des Reibungseinflusses wird man die Eigenfrequenz nicht unnötig tief wählen. Sehr kleine Wege bei hoher Frequenz zeichnet man zweckmäßig optisch auf. Wegen der fehlenden Reibung kommt man immer zu sehr kleinen Massen.

Da die Meßwege bei *Beschleunigungsmessgeräten* nehmen mit wachsender Eigenfrequenz, diese aber kleiner als die Frequenz des zu untersuchenden Vorganges sein muß, kommt von den mechanischen Verfahren für schnellere Vorgänge gewöhnlich nur die Aufzeichnung auf Glas oder Stahl in Betracht. In den äußersten Fällen wird man die Meßwege wieder optisch aufzeichnen, auch mit Rücksicht auf die Störkräfte im Anzeigemechanismus. Ein großer Nachteil bleibt noch der Aufzeichnung auf Wachspapier bei langsameren Vorgängen. Dabei wird man die Aufzeichnungshöhe nicht allzusehr beschränken, da Platz und Gewichtswissen gewöhnlich nur eine untergeordnete Rolle spielen. Sind lediglich die Extremwerte von Bedeutung, benutzt man Geräte mit Zeigerablesung. Statistischen Untersuchungen dienen Glasmeßgeräte, die dann unter Umständen eine verkleinerte Aufzeichnung der Meßwege erfordern.

Zusammenfassung.

Die Gestaltung mechanischer und optischer Schwingungsmessgeräte nach dem Feder-Masse-System ist vor allem durch ihr dynamisches Verhalten

bedingt. Die wichtige Forderung gerader Federkennlinie des eigentlichen Meßelementes läßt sich häufig nur mit einem gewissen Aufwand erfüllen. Verschiedene Anordnungen werden beschrieben. Die Meßwertanzeige mit mechanischen Mitteln kommt im allgemeinen nur für langsamere Vorgänge in Betracht. Solche Mittel sind für Geräte mit Zeigerablesung insbesondere Zahnradgetriebe, für schreibende Geräte in der Regel Hebelsysteme. Der Einfluß der Schreibstiftreibung wächst mit der Übersetzung, die man daher möglichst beschränkt, auch mit Rücksicht auf kleine Abmessungen und geringes Gewicht. Auf die verschiedenen Arten der Aufzeichnung wird näher eingegangen. Optische Anzeige wendet man insbesondere bei schnellen Vorgängen an. Sie kommt über einen Drehspiegel zustande, der ein Lichtbündel steuert. Näher erörtert wird die optische Aufzeichnung und deren Beugungsunschärfe. Besondere Beachtung als allgemeine Bauelemente erfahren Federgelenke und Dämpfungseinrichtungen. Die grundlegenden Gesichtspunkte finden Anwendung auf ausgeführte Geräte. Für die Wahl technischer Mittel bei Schwingweg- und Beschleunigungsmessungen werden allgemeine Richtlinien abgeleitet.

Literatur. [1] KLOTTER, K.: Einführung in die technische Schwingungslehre. Berlin 1928. — [2] KLOTTER, K.: Messung mechanischer Schwingungen (Dynamik der Schwingungsmessgeräte). Berlin 1943. — [3] FREISE, H.: Arch. techn. Messen J 031—14 (1943). — [4] KAISER, H.: Z. techn. Phys. 16, 303 (1935). — [5] KAISER, H.: Arch. techn. Messen J 031—2 (1936). — [6] PABST, W.: Z. VDI 73, 1629 (1929). — [7] FREISE, H.: Arch. techn. Messen J 031—10 (1938). — [8] LEHR, E.: Schwingungstechnik, Bd. 1. Berlin 1930. — [9] FREISE, H.: Ber. 181 der Lilienthal-Ges. für Luftfahrtforsch., S. 83, 1944. — [10] FREISE, H.: Z. VDI 84, 599 (1940). — [11] FREISE, H.: Jb. 1942 der dtsh. Luftfahrtforsch., S. 1773. — [12] FILZEK, B.: Ber. 181 der Lilienthal-Ges. für Luftfahrtforsch., S. 103, 1944. — [13] FREISE, H., H. LEHMANN u. H. TEMPEL: Luftwissen 9, 245 (1942).

Ob.-Ing. HEINRICH FREISE,
(20b) Göttingen, Weender Landstr. 97.

Buchbesprechungen.

Sanden, v.: Praktische Mathematik. Leipzig: J. B. Metzner 1948, 99 S. u. 17 Abb. DMark 3.30.

Bei der praktischen Anwendung der Mathematik in Technik und Naturwissenschaften spielt die numerische oder physische Durchrechnung von Einzelfällen eine wichtige Rolle. Die hierfür erforderlichen Rechenmethoden (einschließlich der Aufstellung brauchbarer Rechenformulare und stets notwendigen Fehlerabschätzung) gehören zum unentbehrlichen Rüstzeug des Ingenieurs. Der vorliegende Leitfaden gibt in etwas erweitertem Umfang wie das früher vom gleichen Verf. erschienene „Mathematische Praktikum“ eine nützliche Einführung in die einfachsten Methoden: elementare Behandlung von Funktionen, Näherungsverfahren mittels TAYLOR-Entwicklung, Integration, Differenzierung und Interpolation, einiges aus der Statistik, Ausschlagsrechnung, harmonische Analyse. Die für die Praxis besonders wichtigen Methoden zur numerischen Behandlung von Differentialgleichungen werden hoffentlich in einem weiteren Bändchen behandelt werden. R. SAUER.

Sassenfeld-Tschunko: Mathematische Tafeln (I. Teil: Elementare Funktionen). Walldorf bei Heidelberg: Fr. Laidig. 1949, 34 S. DMark 5.75.

Die Tafeln enthalten mehr als die üblichen kleinen Rechenhandbücher. Durch geschickten Aufbau, insbesondere die wohlüberlegte Anordnung der Zeilen, gelingt es, einen fangreichen Zahlenstoff auf extrem knappem Raum darzustellen. Der Druck ist allerdings sehr klein.

Aus dem Inhalt seien genannt: BRIGGS-Logarithmen und Antilogarithmen mit 4stelligen Mantissen, natürliche Logarithmen mit 5 Dezimalen, Kreisfunktionen nach Altgrad, Neugrad und natürlichem Argument, Winkelumrechnungstafel, Logarithmen der Kreisfunktionen, zyklometrische Funktionen, Hyperbelfunktionen, Tafel der Primfaktoren der Zahlen bis 2000. Zur bequemeren Handhabung können alle Tafeln auch einzeln als Arbeitsblätter bezogen werden.

R. SAUER.

Pohl, R. W.: Elektrizitätslehre. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer 1949. 13. u. 14. Aufl. 302 S. u. 497 Abb. DMark 18.60.

Die neue Auflage von R. W. POHLS bekannter und allgemein anerkannter Elektrizitätslehre ist zum ersten Male seit ihrem ersten Erscheinen (1927) vollständig neu gesetzt worden. Dadurch wurde es möglich wichtige neuere Dinge aufzunehmen, den Stoff zum Teil zweckmäßiger anzuordnen und, zur Vermeidung einer Vergrößerung des Umfanges, weniger Wichtiges zu streichen. Ergänzungen und Änderungen wurden vor allem vorgenommen in den Kapiteln IX (Materie im Magnetfeld), XII (Mechanismus der Leitungsströme), XIII (Elektrische Felder in der Grenzschicht zweier Substanzen), XIV (Die Radioaktivität). Das Studium der schwierigeren Kapitel erfordert bei der äußersten Knappheit in der Darstellung oft große Konzentration. Der Inhalt ist aber nunmehr noch reichhaltiger und die 3 Bände der

Einführung in die Physik haben einen weitgehend einheitlichen Charakter gewonnen. Eine der originellsten und wertvollsten unter den neueren Darstellungen der Experimentalphysik.

E. RÜCHARDT.

Harting, Hans: Photographische Optik. Pössneck: Rudolph A. Lang 1948. 3. Aufl., 164 S. Geb. DMark 15.60.

Der Verf. hat nicht nur die Entwicklung des modernen, photographischen Objektivs miterlebt, sondern sie auch durch eigene, hervorragende Konstruktionen maßgeblich gefördert. Er, der heute in hohem Alter die wissenschaftliche Oberleitung des Jenaer Zeißwerks inne hat, scheint daher wie kaum ein anderer berufen, uns dieses Gebiet der technischen Optik rückblickend zu schildern. In der jetzt vorliegenden 3. Auflage seines Buches „Photographische Optik“ gibt er diesen Überblick in pädagogisch sehr geschickter Art und auf leichtverständliche Weise. Er schildert die Entwicklung der „Astigmaten“ von der einfachen Sammellinse bis zu den bekannten STEINHEILschen Objektivtypen und zum PETZVALschen Porträtobjektiv. Wesentlich umfangreicher und bedeutungsvoller sind natürlich seine Ausführungen über die „Anastigmaten“. Ausgehend von den RUDOLPHschen Protaraten zeigt er den Weg, der über den E. VON HÖEGHschen Doppelanastigmaten, über das HARTINGSche Heliar, das Zeissische Tessar und viele andere mehr oder weniger bekannte Objektivkonstruktionen zu den modernsten Universal-Linsensystemen für die neuzeitlichen Kleinbildkamern und Kinogeräte, wie z. B. den BERTELESchen Sonnatypen und zu den leistungsfähigsten Weitwinkel- und Teleobjektiven führt.

Einleitend findet man eine elementare Einführung in die geometrische Optik, soweit sie zum Verständnis des eigentlichen Stoffes des Buches notwendig erscheint und abschließend eine Reihe wertvoller Hinweise für die Handhabung, Beurteilung und Prüfung der Objektive, sowie sehr erwünschte Ausführungen über die Verminderung der Lichtverluste durch partielle Reflexion an den Linsenflächen und über die Beseitigung störender Reflexe im Bilde durch Anwendung sog. polarisierender Folien oder Einkristalle. Das letzte Kapitel vermittelt eine Übersicht über die Formeln zur Durchrechnung optischer Linsensysteme bis zur Ermittlung der SEIDELschen Bildfehler. Als Anhang ist ein Übersichtsplan für die optischen Glasarten des Jenaer Glaswerks von Schott & Gen. beigelegt.

Es ist dem Verf. zweifellos gelungen, „die Darstellung der elementaren photographischen Optik bis auf den jetzigen Stand der Technik zu erweitern“ und jedem, der sich für dieses Wissensgebiet interessiert, wird die Lektüre Freude und Vorteile gewähren.

H. HARTINGER.

Sommerfeld, Arnold: Vorlesungen über theoretische Physik. Bd. III: Elektrodynamik. Leipzig: Akad. Verl. Ges. 1949. XVI, 374 S. u. 48 Abb. DMark 12.—

Eine reiche Lebensernte hat SOMMERFELD eingebracht und wir empfangen dankbar, was er uns aus seinem Überfluß schenkt. Seine Elektrodynamik möchte man mit einem Werk der schönen Literatur vergleichen, so sehr fühlt man sich persönlich angesprochen, so sehr ist es durchstrahlt von dem Geist, dessen Höchstes es ist, der prästabilierten Harmonie zwischen Mathematik und Physik nachzuspüren. Man muß das Buch in einem Zuge lesen. — Die MAXWELLSche Theorie hatte nun von jeher etwas Faszinierendes an sich; aber die SOMMERFELDSche Darstellung ist schlechthin unübertrefflich. Die MAXWELLSchen Gleichungen werden in vektorieller Integralform an die Spitze gestellt und dann erst in Differentialform niedergeschrieben, ein Verfahren, das wohl am meisten den genialen Intuitionen FARADAYS und AMPÈRES entspricht. Daran schließt sich zwangsläufig die Behandlung der statischen, stationären, quasistationären und schnellveränderlichen Felder. SOMMERFELD behandelt in diesen Abschnitten des Buches eine Fülle von Problemen. Teils sind sie mathematisch einfach zu lösen und deswegen geeignet, dem Anfänger das Wesen der Erscheinungen klar werden zu lassen. Teils entsprechen sie Aufgaben, die im Laufe der Zeit von der physikalischen bzw. elektrotechnischen Forschung und Praxis formuliert worden sind. Ich nenne nur den Skineffekt, die Spulen, die Drahtwellen, die Hohlleiter und die LECHER-Leitung (die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen längs der Erdoberfläche wird in Bd. 6 behandelt). Zu der Lösung fast aller dieser Probleme haben

SOMMERFELD und seine Schüler Entscheidendes beigetragen. Die einheitliche und elegante Darstellung der Ergebnisse in einem Lehrbuch ist als besonders glücklicher Umstand zu erwähnen, da vielen Lesern die Originalarbeiten nur schwer zugänglich sein werden. Dabei benützt SOMMERFELD konsequent das sog. technische Maßsystem. Das letzte Drittel des Buches ist der Relativitätstheorie und der Elektronentheorie gewidmet. Man kommt aus dem Staunen nicht heraus, daß SOMMERFELD gelungen ist, auf 110 Seiten bis zu den physikalisch wichtigsten Ergebnissen der allgemeinen Relativitätstheorie einerseits und bis zu den modernen Theorien über die Struktur des Elektrons andererseits vorzudringen. Dabei sind die letzten Paragraphen des Buches von derselben Klarheit, Eleganz und Leichtfaßlichkeit wie die ersten! SOMMERFELD geht von der Allgemeingültigkeit der MAXWELLSchen Gleichungen aus, die er als Beziehungen zwischen Vierer- und Sechservektoren schreibt unter gleichzeitiger Entwicklung des zugehörigen mathematischen Formalismus. Die Besinnung auf die transformationstheoretischen Grundlagen der Vektor- und Tensorrechnung in der MINKOWSKI-Welt führt sofort zur Gruppe der LORENTZ-Transformationen und ihren kinematischen Konsequenzen. Die Berechnung des Feldes eines bewegten Elektrons leitet über zur relativistischen Mechanik, die in ihrer allgemeinsten Fassung (SCHWARZSCHILDsches Prinzip der kleinsten Wirkung) formuliert wird. SOMMERFELD behandelt sodann die Strahlungskraft. Der Abschluß der Elektronentheorie bildet der Paragraph über die nicht-linearen Theorien von ME und BORN-INFELD. Der letzte Paragraph des Buches bringt noch einen Höhepunkt: eine kurze Einführung in die allgemeine Relativitätstheorie mit einer Durchführung der SCHWARZSCHILDschen Massenbestimmung ohne den allgemeinen Tensorkalkül (nach einer Idee von W. LENZ). Damit kann SOMMERFELD die Periheliondrehung des Merkur, die Lichtablenkung am Sonnenrand und Rotverschiebung der Spektrallinien durch Gravitationsfelder in leichtverständlicher Weise darstellen. — Interessante Übungsaufgaben bilden eine wertvolle Ergänzung des Buches. Mit Vergnügen wird man auch die kurzen biographischen Notizen über FARADAY, MAXWELL, AMPÈRE und H. HERTZ lesen. An der Elektrodynamik kann man wieder einmal so recht die Bedeutung der SOMMERFELDSchen Bücher für die Ausbildung des Physikernachwuchses erkennen. Hinsichtlich der Student der Arbeitsweise des theoretischen Physikers: Nach der Klarstellung der Grundlagen, präzise Formulierung des speziellen Problems, Herausarbeitung eines Modells, das sich physikalisch übersehen und mathematisch bis zum numerischen Ergebnis behandeln läßt.

GERHARD U. SCHUBERT.

Rohrberg, Albert: Graphische Funktionentafeln. Enthaltend die Mantissen der dekadischen Logarithmen und trigonometrischen Funktionen von Minute zu Minute auf 4 Stellen. Berlin: Schiele u. Schön 1949. 30 S. DMark 4.50.

Die Funktionsskalen ermöglichen in übersichtlicher und rascher Weise die Entnahme der numerischen Werte auf 4 Stellen bzw. der Winkel auf Minuten genau ohne Interpolation. Sie werden dem Praktiker, der häufig mit divierstelligen Werten der angegebenen Funktionen zu rechnen hat, ein sehr willkommenes Hilfsmittel sein.

J. HEINHOLD.

Rothe, Rudolf: Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker und Ingenieure. Teil I: Differentialrechnung u. Grundformeln der Integralrechnung nebst Anwendungen. 8. Aufl. Bielefeld: Verlag für Wissenschaft und Fachbuch G.m.b.H. 1949. 208 S. u. 161 Abb. DMark 6.20.

Lizenzausgabe des ersten Teiles des bekannten in zahlreichen Auflagen bewährten Mathematik-Lehrbuches aus der TEUBNERSchen Sammlung mathematischer Leitfäden. Eine knapp gehaltene Leitfaden mit zahlreichen Beispielen, Anwendungen und Übungsaufgaben. Auf die Beziehung der mathematischen Theorie zu den Anwendungen und zu den Verfahren der praktischen Mathematik wird großer Wert gelegt. Die vorliegende 8. Auflage ist ein unverändert Neudruck der 7. Auflage. Er enthält die Abschnitte: Zahlveränderliche und Funktionen. Hauptsätze der Differentialrechnung und Grundformeln der Integralrechnung. Funktionen von zwei und mehr Veränderlichen. Differentialgeometrie ebener Kurven. Komplexe Zahlen, Veränderliche und Funktionen.

J. HEINHOLD.